

> contredit la propriété examinée, alors il est certain qu'elle est fausse, et il l'abandonne.

La théorie des graphes se prête bien à cette approche, et c'est pourquoi les méthodes automatiques de recherche de conjectures en théorie des graphes ont donné les premiers exemples incontestables de découvertes mathématiques faites par l'ordinateur.

Le programme Graffiti est la première grande réussite de cette approche. Il a été développé et utilisé de 1984 à 2002 par le mathématicien polonais Siemion Fajtlowicz.

Graffiti s'intéresse particulièrement aux invariants des graphes. Ce sont par exemple le diamètre du graphe (la distance – en nombre d'arêtes – maximale séparant deux nœuds), le nombre chromatique d'un graphe (le nombre minimal de couleurs qu'il faut pour colorer les nœuds du graphe en évitant que deux nœuds voisins soient de même couleur), le degré maximal d'un graphe (nombre maximal de voisins d'un nœud), etc.

Plusieurs dizaines d'invariants sont étudiés et les relations entre ces invariants sont complexes, mais essentielles pour la théorie.

En menant des recherches automatisées de relations entre ces invariants, Graffiti a

proposé de nombreuses conjectures intéressantes. Le programme élimine toutes les conjectures contredites par un des graphes qu'il connaît, et celles classiques ou s'en déduisant facilement. Siemion Fajtlowicz indique d'ailleurs que c'est ce travail de sélection qui a été le plus délicat et complexe à programmer. Parmi les conjectures de Graffiti, certaines ont été démontrées par la suite ou invalidées par des chercheurs de la discipline, donnant lieu à plusieurs publications scientifiques et thèses universitaires.

Il ne fait pas de doute que ce programme et ses successeurs contribuent réellement aux progrès mathématiques. Siemion Fajtlowicz a d'ailleurs été amené à travailler avec les meilleurs spécialistes de la théorie des graphes comme Paul Erdős, Bela Bollobas ou Paul Spencer. Erdős et ses coauteurs, dans un article de 1988 où ils démontrent l'une des conjectures du programme Graffiti, reconnaissent son apport. La conjecture en question affirme que $dm_G \leq r_G$, où dm_G est la distance moyenne entre deux nœuds du graphe G , et r_G est la somme des inverses du nombre de voisins des nœuds de G .

En reprenant le principe de Graffiti, d'autres thèmes de recherche ont été abordés et ont donné lieu à une interaction entre mathématiciens humains et ordinateurs proposant conjectures, réfutations et parfois démonstrations. Aujourd'hui encore, en théorie des graphes et dans certains autres domaines, l'utilisation de générateurs de conjectures aide les chercheurs.

RECHERCHER DES FORMULES

Un événement remarquable s'est produit en 1995 dans le domaine de l'aide informatique à la recherche mathématique. Simon Plouffe a programmé sa machine pour qu'elle explore des formules d'un certain type donnant le nombre π et en a effectivement trouvé une que personne ne soupçonnait. Ici, les objets manipulés ne sont pas finis, puisqu'il s'agit de nombres réels ayant une infinité de décimales. Même si la méthode utilisée pour les conjectures sur les graphes ne s'applique pas, le procédé utilisé lui ressemble.

On se donne plusieurs nombres réels dont on connaît des évaluations aussi précises qu'on le veut ; c'est le cas pour π , et pour les sommes de séries dont le terme général est de la forme $1/[r^*(ak+b)]$. On recherche alors s'il existe une combinaison linéaire à coefficients entiers entre les nombres choisis qui soit nulle avec quelques décimales de précision. C'est un travail patient de calcul impossible à mener à la main, mais pour lequel on dispose d'algorithmes efficaces. Quand une relation est trouvée, on teste si elle reste vraie avec un plus grand nombre de décimales. Là encore, c'est

5 L'ORDINATEUR MATHÉMATICIEN ?

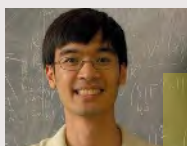
Voici les réponses données en 2014 par de célèbres mathématiciens à la question : « Dans cent ans ou dans mille ans, les ordinateurs dépasseront-ils les humains en mathématiques comme ils les dépassent maintenant au jeu d'échecs ? »

Terence Tao (médaillé Fields en 2006) : « Les ordinateurs vont certainement devenir encore plus puissants, mais j'espère que l'essentiel du travail mathématique continuera d'être fait par des humains... utilisant des ordinateurs. »

Richard Taylor (ce professeur à l'université Harvard a aidé Andrew Wiles à démontrer le grand théorème de Fermat) : « Une meilleure question serait : est-ce qu'un ordinateur recevra la médaille Fields ? »

Jacob Lurie (professeur à l'IAS de Princeton) : « Mille ans, c'est une durée trop longue pour faire des prévisions. »

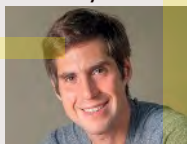
David Ruelle (professeur à l'Institut des hautes études scientifiques) envisage une sorte de passage de témoins de l'homme à la machine pour



Terence Tao



Richard Taylor



Jacob Lurie



David Ruelle



Marcus du Sautoy

faire des mathématiques :
« La capacité intellectuelle à faire des mathématiques est un développement récent du point de vue de l'évolution biologique. J'ai du mal à croire que ce développement récent ait produit quelque chose de si unique qu'il ne peut être imité avec succès par les ordinateurs. Je pense plutôt que la créativité mathématique humaine [...] est une étape dans l'évolution, et qu'il y aura d'autres étapes. La grande question devient alors : quel genre de mathématiques pourrait être produit par une créativité mathématique artificielle ? »

Marcus du Sautoy (professeur à Oxford), dans son livre *The Creativity Code* (2019), indique : « Les méthodes d'apprentissage automatique donnent aujourd'hui des résultats décevants en mathématiques. Seront-elles un jour capables de s'appliquer aux mathématiques que nous aimons et d'en créer qui leur ressemblent ? C'est bien possible et l'échec actuel est probablement simplement un sursis. »