

UN SEUL PARAMÈTRE POUR L'ÉLÉPHANT

1 Steven Piantadosi a proposé la fonction : $f_p(x) = \sin^2(2^{kx} \arcsin(\sqrt{p}))$, où le nombre réel p est un paramètre, et a montré qu'elle présente une extraordinaire propriété d'ajustement. La valeur de k est fixée une fois pour toutes, et indique la précision avec laquelle on approchera les données. On considère par exemple des valeurs $y_0, y_1, \dots, y_n$ telles que les points de coordonnées $(0, y_0), (1, y_1), \dots, (n, y_n)$ dessinent un éléphant, en serrant assez les abscisses et en dessinant des points assez gros. La méthode de Steven Piantadosi (expliquée dans

les encadrés 3 et 4) permet alors de déterminer la valeur du paramètre p pour que : $f_p(0) = y_0, f_p(1) = y_1, \dots, f_p(n) = y_n$, autrement dit pour que le graphe de $f_p(x)$ dessine un éléphant. Un seul paramètre suffit pour avoir un éléphant ! Bien sûr, on peut obtenir tous les dessins qu'on veut en changeant la valeur de p . Laurent Boué a écrit des programmes disponibles sur internet qui permettent le calcul de p pour les dessins souhaités et a fait les calculs pour un oiseau et une tortue (voir la bibliographie).

L'énoncé démontré par Steven Piantadosi est le suivant.

- On se fixe une précision e , par exemple $1/1000$, ce qui signifie que l'on recherchera à avoir des égalités avec une erreur inférieure à e .
- Il existe une fonction $f_p(x)$ dépendant d'un paramètre réel p , telle que, quelles que soient les données $y_0, y_1, \dots, y_n$ en nombre fini, il existe une valeur p du paramètre pour laquelle $f_p(0) = y_0, f_p(1) = y_1, \dots, f_p(n) = y_n$, avec une erreur inférieure à e pour chaque égalité.

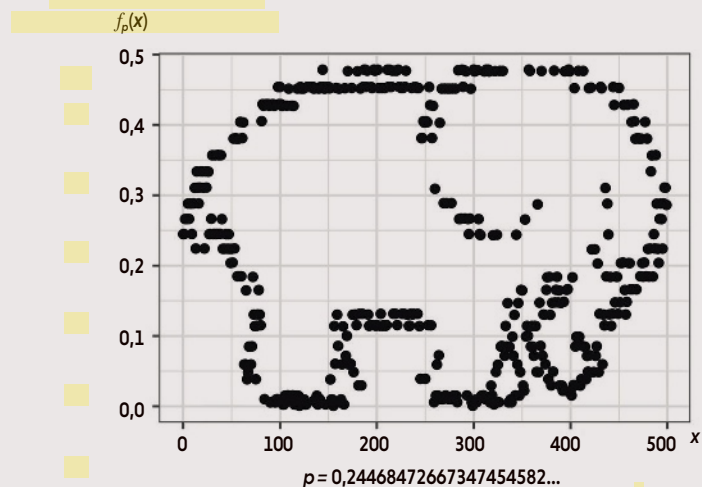
En clair, en faisant varier le paramètre p , la fonction $f_p(x)$ s'ajuste avec une précision e à tout jeu de données fixé à l'avance, aussi grand soit-il.

La fonction miraculeuse de Steven Piantadosi est : $f_p(x) = \sin^2(2^{kx} \arcsin(\sqrt{p}))$. Rappelons que $\arcsin(x)$ est la fonction inverse de $\sin(x)$, ce qui signifie que pour tout x compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2, y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$.

La valeur k qui apparaît dépend de la précision e souhaitée, mais une fois e fixée, k l'est aussi. Bien évidemment, le chercheur a calculé le paramètre p qui donne un éléphant. L'encadré 1 montre le résultat.

D'OÙ VIENT L'EXPLOIT ?

Comprendre en détail comment la fonction $f_p(x)$ réalise cet exploit, et comment s'y prendre pour trouver les bonnes valeurs du paramètre p , est un jeu mathématique qui exige un peu de calcul (voir les encadrés 3 et 4). Cependant, l'idée générale est simple : on va cacher dans le paramètre p qui, parce qu'il est un nombre réel, peut contenir une infinité d'informations, les nombres $y_0, y_1, \dots, y_n$. Ensuite, la



$p = 0,74933466...$



$p = 0,70704013...$