

LA FONCTION DE PIANTADOSI

4

Compte tenu de ce qui a été dit dans l'encadré 3 sur la fonction D , on considère à présent les trois fonctions :

$$\phi(x) = \sin^2(2\pi x);$$

$$\phi^{-1}(x) = (\arcsin \sqrt{x})/2\pi;$$

$$L(x) = 4x(1-x).$$

Par définition, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$ pour $0 \leq x \leq 1/4$.

Voici des calculs inévitables pour arriver au miracle.

$$\phi(D(x)) = \phi(2x) = \sin^2(4\pi x) =$$

$$4 \sin^2(2\pi x) (1 - \sin^2(2\pi x)) =$$

$$L(\phi(x)) \text{ (on a utilisé}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$\text{et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)).$$

$$\text{En prenant } x = \phi^{-1}(p),$$

$$\text{soit } p = \phi(x), \text{ on a :}$$

$$\phi(D(\phi^{-1}(p))) = L(p),$$

$$\text{d'où l'on déduit :}$$

$$\phi(D^k(\phi^{-1}(p))) = L^k(p).$$

Autrement dit, pour connaître l'effet de L appliqué k fois à p , il suffit d'appliquer ϕ^{-1} à p , puis d'appliquer k fois D , puis d'appliquer ϕ au résultat.

Nous allons maintenant comprendre quel paramètre p choisir pour que $f_p(x)$ donne $y_0, y_1, \dots, y_n$ pour $x = 0, 1, \dots, n$. On note d'abord que $f_p(x) = \sin^2(2^{kx} \arcsin(\sqrt{p})) = \phi(D^{kx}(\phi^{-1}(p))) = L^{kx}(p)$. Si l'on veut que $f_p(x)$ donne approximativement $y_0, y_1, \dots, y_n$ pour $x = 0, 1, \dots, n$, il suffit donc que $D^{kx}(\phi^{-1}(p))$ donne approximativement $\phi^{-1}(y_0),$

$\phi^{-1}(y_1), \dots, \phi^{-1}(y_n)$ pour $x = 0, 1, \dots, n$. D'après l'encadré 3, il suffit donc que $\phi^{-1}(p)$ soit fait de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_0)$, suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_1)$, ..., suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_n)$.

Conclusion : le paramètre p que nous recherchons doit être l'image par ϕ de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_0)$, suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_1)$, ..., suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_n)$. Plus k sera grand, plus les y_i seront donnés avec précision par $f_p(0), f_p(1), \dots, f_p(n)$.

Prenons par exemple $y_0 = 0,7, y_1 = 0,4, y_2 = 0,5$ et $k = 12$. On calcule $\phi^{-1}(0,7)$, $\phi^{-1}(0,4)$ et $\phi^{-1}(0,5)$ avec 12 chiffres binaires significatifs :

$$\phi^{-1}(0,7) = 0,001010000110_2;$$

$$\phi^{-1}(0,4) = 0,000110111110_2;$$

$$\phi^{-1}(0,5) = 0,001000000000_2.$$

On met les chiffres binaires trouvés les uns derrière les autres :

$$q = 0,0010100001100001101111000100000000_2 =$$

$$0,157741434872150421142578.$$

On calcule $p = \phi(q) = 0,6999652447...$ et on a bien ce qui est attendu :

$$f_p(0) = 0,6999652447,$$

$$\text{soit environ } 0,7,$$

$$f_p(1) = 0,3996355201,$$

$$\text{soit environ } 0,4,$$

$$f_p(2) = 0,4999999999,$$

$$\text{soit environ } 0,5.$$

qui peuvent être décrits avec un nombre fini de bits (par exemple en les faisant produire par une machine de Turing) est dénombrable. Cet ensemble de nombres réels a donc une mesure nulle dans l'ensemble de tous les nombres réels. On sait aussi qu'il existe des fonctions injectives (c'est-à-dire ne prenant pas deux fois la même valeur) de $\mathbb{R}^n$ (l'espace de dimension n) vers $\mathbb{R}$. Cela confirme que le nombre de paramètres dans un modèle ne peut pas être une mesure raisonnable de sa complexité.

UNIVERSALITÉ

La fonction $f_p(x) = \sin^2(2^{kx} \arcsin(\sqrt{p}))$ peut être qualifiée d'universelle puisqu'elle s'adapte à toute série de données $y_0, y_1, \dots, y_n$. Ce n'est pas le premier objet universel que l'on rencontre en mathématiques.

Le plus simple est sans doute le nombre π . On conjecture que c'est un nombre-univers et le calcul de plusieurs milliers de milliards de ses décimales le confirme: chaque séquence possible de chiffres décimaux (par exemple 243, 21145 ou 929292), aussi longue qu'on veut, apparaîtrait ainsi dans son développement décimal. Si π est réellement un nombre-univers, on peut le voir comme une fonction qui, quand on fixe un entier n , affiche par exemple 1 million de chiffres décimaux à partir de la n -ième décimale. Avec ce million de chiffres, on peut dessiner une image de 1000×1000 pixels avec 10 niveaux de gris. Si π est un nombre univers, alors pour chaque image de ce format, votre portrait par exemple, il existe au moins un entier n tel que l'image numéro n tirée de π la produise. En ce sens, π serait au moins aussi universel que $f_p(x)$, puisque capable de produire toutes les images du format indiqué.

Cependant, la fonction prodigieuse de Piantadosi a un double avantage sur π :

(a) on est certain qu'elle est universelle, ce n'est pas une conjecture;

(b) on sait calculer la valeur du paramètre p nécessaire pour obtenir des données $y_0, y_1, \dots, y_n$, et ce calcul est faisable, ce qui n'est pas le cas pour le n donnant votre portrait dans π .

UN AUTRE OBJET UNIVERSEL: LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

Un autre objet universel totalement inattendu a été rencontré en mathématiques en 1975 par le mathématicien russe Sergei Voronin (voir la bibliographie). Il concerne la célèbre fonction zêta de Riemann.

Cette fonction notée $\zeta(s)$ est définie, pour tout nombre réel $s > 1$, par la formule:

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$$

On peut lui donner un sens pour toutes les valeurs de s , y compris quand s est un nombre complexe (sauf en $s=1$). On peut la voir

$$\phi(x) = \sin^2(2\pi x)$$

$$\phi^{-1}(x) = (\arcsin \sqrt{x})/2\pi$$

$$L(x) = 4x(1-x)$$

