

LA FONCTION DE PIANTADOSI

4

Compte tenu de ce qui a été dit dans l'encadré 3 sur la fonction D , on considère à présent les trois fonctions :

$$\phi(x) = \sin^2(2\pi x);$$

$$\phi^{-1}(x) = (\arcsin \sqrt{x})/2\pi;$$

$$L(x) = 4x(1-x).$$

Par définition, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$ pour $0 \leq x \leq 1/4$.

Voici des calculs inévitables pour arriver au miracle.

$$\phi(D(x)) = \phi(2x) = \sin^2(4\pi x) =$$

$$4 \sin^2(2\pi x) (1 - \sin^2(2\pi x)) =$$

$$L(\phi(x)) \text{ (on a utilisé)}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$\text{et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

$$\text{En prenant } x = \phi^{-1}(p),$$

$$\text{soit } p = \phi(x), \text{ on a :}$$

$$\phi(D(\phi^{-1}(p))) = L(p),$$

$$\text{d'où l'on déduit :}$$

$$\phi(D^k(\phi^{-1}(p))) = L^k(p).$$

Autrement dit, pour connaître l'effet de L appliqué k fois à p , il suffit d'appliquer ϕ^{-1} à p , puis d'appliquer k fois D , puis d'appliquer ϕ au résultat.

Nous allons maintenant comprendre quel paramètre p choisir pour que $f_p(x)$ donne $y_0, y_1, \dots, y_n$ pour $x = 0, 1, \dots, n$. On note d'abord que $f_p(x) = \sin^2(2^{kx} \arcsin(\sqrt{p})) = \phi(D^{kx}(\phi^{-1}(p))) = L^{kx}(p)$. Si l'on veut que $f_p(x)$ donne approximativement $y_0, y_1, \dots, y_n$ pour $x = 0, 1, \dots, n$, il suffit donc que $D^{kx}(\phi^{-1}(p))$ donne approximativement $\phi^{-1}(y_0),$

$\phi^{-1}(y_1), \dots, \phi^{-1}(y_n)$ pour $x = 0, 1, \dots, n$. D'après l'encadré 3, il suffit donc que $\phi^{-1}(p)$ soit fait de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_0)$, suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_1), \dots$, suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_n)$.

Conclusion : le paramètre p que nous recherchons doit être l'image par ϕ de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_0)$, suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_1), \dots$, suivi de k chiffres binaires de $\phi^{-1}(y_n)$. Plus k sera grand, plus les y_i seront donnés avec précision par $f_p(0), f_p(1), \dots, f_p(n)$.

Prenons par exemple $y_0 = 0,7, y_1 = 0,4, y_2 = 0,5$ et $k = 12$. On calcule $\phi^{-1}(0,7)$, $\phi^{-1}(0,4)$ et $\phi^{-1}(0,5)$ avec 12 chiffres binaires significatifs :

$$\phi^{-1}(0,7) = 0,001010000110_2;$$

$$\phi^{-1}(0,4) = 0,000110111110_2;$$

$$\phi^{-1}(0,5) = 0,001000000000_2.$$

On met les chiffres binaires trouvés les uns derrière les autres :

$$q = 0,001010000110000110111$$

$$110001000000000_2 =$$

$$0,157741434872150421142578.$$

On calcule $p = \phi(q) = 0,6999652447\dots$ et on a bien ce qui est attendu :

$$f_p(0) = 0,6999652447,$$

$$\text{soit environ } 0,7,$$

$$f_p(1) = 0,3996355201,$$

$$\text{soit environ } 0,4,$$

$$f_p(2) = 0,4999999999,$$

$$\text{soit environ } 0,5.$$

qui peuvent être décrits avec un nombre fini de bits (par exemple en les faisant produire par une machine de Turing) est dénombrable. Cet ensemble de nombres réels a donc une mesure nulle dans l'ensemble de tous les nombres réels. On sait aussi qu'il existe des fonctions injectives (c'est-à-dire ne prenant pas deux fois la même valeur) de $\mathbb{R}^n$ (l'espace de dimension n) vers $\mathbb{R}$. Cela confirme que le nombre de paramètres dans un modèle ne peut pas être une mesure raisonnable de sa complexité.

UNIVERSALITÉ

La fonction $f_p(x) = \sin^2(2^{kx} \arcsin(\sqrt{p}))$ peut être qualifiée d'universelle puisqu'elle s'adapte à toute série de données $y_0, y_1, \dots, y_n$. Ce n'est pas le premier objet universel que l'on rencontre en mathématiques.

Le plus simple est sans doute le nombre π . On conjecture que c'est un nombre-univers et le calcul de plusieurs milliers de milliards de ses décimales le confirme: chaque séquence possible de chiffres décimaux (par exemple 243, 21145 ou 929292), aussi longue qu'on veut, apparaîtrait ainsi dans son développement décimal. Si π est réellement un nombre-univers, on peut le voir comme une fonction qui, quand on fixe un entier n , affiche par exemple 1 million de chiffres décimaux à partir de la n -ième décimale. Avec ce million de chiffres, on peut dessiner une image de 1000×1000 pixels avec 10 niveaux de gris. Si π est un nombre univers, alors pour chaque image de ce format, votre portrait par exemple, il existe au moins un entier n tel que l'image numéro n tirée de π la produise. En ce sens, π serait au moins aussi universel que $f_p(x)$, puisque capable de produire toutes les images du format indiqué.

Cependant, la fonction prodigieuse de Piantadosi a un double avantage sur π :

(a) on est certain qu'elle est universelle, ce n'est pas une conjecture;

(b) on sait calculer la valeur du paramètre p nécessaire pour obtenir des données $y_0, y_1, \dots, y_n$, et ce calcul est faisable, ce qui n'est pas le cas pour le n donnant votre portrait dans π .

UN AUTRE OBJET UNIVERSEL: LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

Un autre objet universel totalement inattendu a été rencontré en mathématiques en 1975 par le mathématicien russe Sergei Voronin (voir la bibliographie). Il concerne la célèbre fonction zêta de Riemann.

Cette fonction notée $\zeta(s)$ est définie, pour tout nombre réel $s > 1$, par la formule:

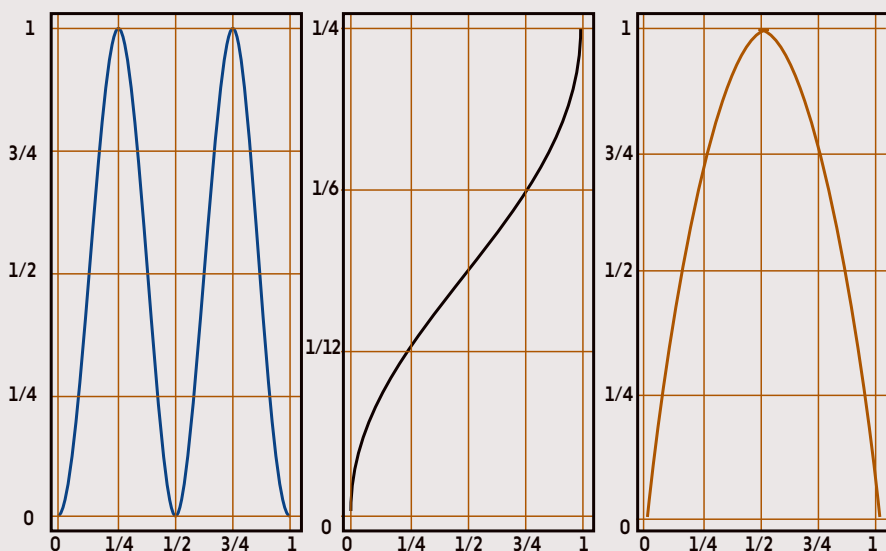
$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$$

On peut lui donner un sens pour toutes les valeurs de s , y compris quand s est un nombre complexe (sauf en $s=1$). On peut la voir

$$\phi(x) = \sin^2(2\pi x)$$

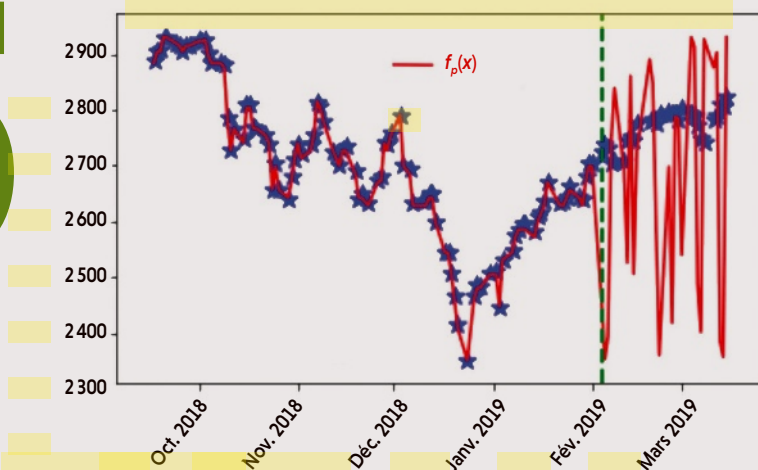
$$\phi^{-1}(x) = (\arcsin \sqrt{x})/2\pi$$

$$L(x) = 4x(1-x)$$



L'ILLUSION DÉÇUE DU SURAJUSTEMENT

5



Laurent Boué a pris 95 valeurs de l'indice boursier américain S&P 500. Il a calculé la valeur de p qui permet à la fonction miraculeuse de Piantadosi, $f_p(x) = \sin^2(2^{kx} \arcsin(\sqrt{p}))$, de redonner ces valeurs. Il a ensuite regardé ce que cela donnait pour les valeurs suivantes de l'indice (au-delà de la barre verticale pointillée verte).

Si la méthode d'approximation par $f_p(x)$ était une bonne façon de découvrir une loi cachée dans les

variations de cet indice boursier, les valeurs suivantes pour le p calculé auraient été proches de celles des données réelles.

Sans surprise, ce n'est pas du tout le cas. Sur le dessin, la courbe rouge est ce que donne $f_p(x)$ et les points bleus sont les valeurs réelles. La fonction $f_p(x)$ permet bien, en changeant p , de s'ajuster à tout ensemble de données, mais ce n'est en rien un moyen pour découvrir des lois cachées. C'est un exemple parfait de surajustement inutile.

comme une fonction qui, à tout point du plan (les nombres complexes sont assimilables à des points du plan), associe un autre point du plan. Cette fonction joue un rôle central en théorie des nombres et, en particulier, la position des valeurs de s qui l'annulent est liée à la répartition des nombres premiers.

Quand on considère des fonctions de ce type, qui produisent des nombres complexes à partir de nombres complexes, les fonctions jouant le rôle des fonctions dérivables se nomment les «fonctions holomorphes». Les fonctions usuelles comme x^n , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$ et toutes celles que l'on obtient en les combinant sont bien sûr holomorphes.

Dans la partie du plan correspondant à une bande verticale B des points de coordonnées (x, y) avec $1/2 < x < 1$, Sergei Voronin a démontré une incroyable propriété d'universalité de $\zeta(s)$. Pour toute partie P de cette bande sans trou et compacte (c'est-à-dire de taille finie, et qui contient la limite de toutes ses suites convergentes), et pour toute fonction holomorphe f qui ne s'annule pas dans P , il existe un nombre réel r tel que $\zeta(s+r)$ prend les mêmes valeurs dans P que f , à ϵ près (ϵ , comme précédemment, est une précision que l'on fixe une fois pour toutes).

Dit autrement : quelle que soit la fonction holomorphe f définie sur une zone P sans trou de la bande B , la fonction ζ prend presque les mêmes valeurs que f quand on examine ses valeurs dans une version décalée vers le haut de P . C'est un peu comme si $\zeta(s)$, à elle seule, pouvait imiter toutes les fonctions holomorphes ! Dans π , il y a sans doute toutes les suites finies de décimales, mais dans $\zeta(s)$, on est certain qu'il y a toutes les fonctions holomorphes ! Précisons que le résultat de Sergei Voronin a été étendu à d'autres fonctions que la fonction $\zeta(s)$.

Un autre objet universel fascinant a déjà été évoqué dans cette rubrique, le graphe universel de Rado (voir *Pour la Science* de novembre 2018). Ce graphe infini contient en effet comme sous-graphes tous les graphes finis, et tous les graphes infinis ; de plus, il a la propriété que quand on en enlève une partie finie, ce qui reste est identique à ce dont on est parti.

Le monde infini des mathématiques recèle des merveilles et procure des étonnements bien au-delà, du moins c'est mon point de vue de mathématicien, de tout ce qu'on peut trouver dans le monde physique qui, en comparaison, apparaît parfois terne et ennuyeux ! ■

BIBLIOGRAPHIE

Interpolation lagrangienne, Wikipédia, 2020.

Zeta function universality, Wikipedia, 2020.

L. Boué, *Real numbers, data science and chaos : How to fit any dataset with a single parameter*, prépublication arXiv:1904.12320, 2019.

L. Boué, *Programmes pour «Real numbers, data science and chaos: How to fit any dataset with a single parameter»*, 2019 : <https://github.com/Ranlot/single-parameter-fit>

C. Zhang et al., *A study on overfitting in deep reinforcement learning*, prépublication arXiv:1804.06893, 2018.

S. T. Piantadosi, *One parameter is always enough*, *AIP Advances*, vol. 8(9), 095118, 2018 (<https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5031956>).

J. Mayer et al., *Drawing an elephant with four complex parameters*, *American Journal of Physics*, vol. 78, pp. 648-649, 2010.

S. Voronin, *Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-Function*, *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443-445, 1975.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

LES MASQUES DÉMASQUÉS

En pleine pandémie de Covid-19, l'intérêt pour les masques respiratoires a bondi, alors même qu'ils sont en usage depuis longtemps. Mais comment fonctionnent-ils ?

Norme FFP2, masque chirurgical ou encore masque fabriqué maison... Ces mots ont envahi notre quotidien avec la pandémie de Covid-19. En tant que physiciens, il ne nous appartient pas de donner des recommandations sur l'usage de ces protections pour minimiser les risques de contamination. En revanche, nous pouvons nous intéresser aux mécanismes physiques mis en œuvre dans leur fonctionnement. On pourrait croire que les masques agissent, pour l'essentiel, comme des tamis. Or ce n'est pas du tout le cas !

FILTRER LES AÉROSOLS

En toussant, en éternuant, en parlant ou tout simplement en respirant, nous produisons des aérosols : autrement dit, nous émettons dans l'air expiré des particules de tailles diverses. Ce sont typiquement des gouttelettes d'eau de diamètre compris entre 1 micromètre (un millième de millimètre) et 100 micromètres, qui s'évaporent rapidement et libèrent dans l'air bactéries (0,5 à 5 micromètres) et virus (0,02 à 0,3 micromètre,

0,1 micromètre pour le virus SARS-CoV-2, responsable du Covid-19).

Les particules les plus grosses tombent rapidement au sol. Les plus légères, en revanche, restent en suspension. Dans de l'air calme, la durée de sédimentation sur une hauteur de 3 mètres est en effet de 4 minutes pour des particules de 20 micromètres de diamètre, et cette durée est multipliée par 4 à chaque fois que l'on divise la taille par 2 : elle dépasse déjà 1 heure pour des particules de 5 micromètres.

En situation épidémique, on peut filtrer l'air à l'aide d'un masque pour protéger notre système respiratoire de ces aérosols chargés de pathogènes. Le premier effet filtrant auquel on songe est l'effet de tamis : comme dans une passoire, ne pourraient traverser le masque que les particules dont la taille est inférieure à celle des trous. Il y a cependant une difficulté majeure : plus les trous sont petits, mieux on filtre mais plus il est difficile de respirer à travers. Si l'on veut que le masque soit utilisable sans assistance mécanique, un filtre à trous submicrométriques, qui seraient nécessaires pour tamiser bactéries et virus, est exclu.

Heureusement, d'autres mécanismes sont à l'œuvre et permettent de piéger des particules de toutes tailles dans le masque. Ce dernier comporte en général une couche, un peu épaisse, composée de fibres non tissées, mais plutôt entrelacées (voir l'encadré page ci-contre). Lorsqu'une particule, entraînée par l'air qui traverse le filtre, vient percuter une fibre, elle s'y colle durablement grâce aux forces intermoléculaires dites « de Van der Waals ». Il faut donc comprendre d'où résultent les collisions particule-fibre.

Aux échelles considérées, on montre que l'écoulement de l'air est dominé par les effets de viscosité et qu'il est

