

R

ENDEZ-VOUS

P.82 Logique & calcul
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

À LA RECHERCHE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

Les nombres irrationnels, qu'ils soient algébriques ou transcendants, se laissent approcher plus ou moins difficilement par des suites de nombres rationnels. La mesure de cette difficulté permet de les classer.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)

Les mots en mathématiques sont parfois arbitraires et difficiles à justifier: par exemple, pourquoi parle-t-on d'un «corps» de nombres en français alors qu'en anglais on emploie le mot *field* qui veut dire «champ»? Sans doute parce qu'il n'y a aucune raison précise de parler de corps ou de champ! Le sarcastique Bertrand Russell disait que «les mathématiques sont une science où l'on ne sait pas de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai» et, pour David Hilbert, si l'on raisonne correctement en géométrie, «on doit toujours pouvoir remplacer “points”, “droites”, “plans” par “tables”, “chaises”, “verres de bière”...»

Le nom «transcendance» et l'adjectif «transcendant», utilisés en théorie des nombres, font rêver et évoquent l'idée de choses profondes, à la limite de nos capacités de compréhension et de raisonnement. Proposés par Leibniz, ces mots sont d'un usage cette fois justifié, tant les problèmes posés par ces notions sont délicats et les progrès pour les maîtriser sont longs et seulement partiels. Voyons cela.

DES NOMBRES NON ALGÈBRIQUES

Nous nous limiterons aux nombres réels (2 , $-1/3$, $\sqrt{2}$, π , etc.), mais beaucoup des résultats que nous allons mentionner s'étendent aux nombres complexes comme le célèbre i dont le carré est -1 .

La plupart des ensembles de nombres réels s'emboîtent: il y a les entiers naturels $0, 1, 2, 3$, etc., contenus dans l'ensemble des entiers relatifs $0, 1, -1, 2, -2$, etc., eux-mêmes sous-ensemble de l'ensemble des nombres rationnels (les fractions) $0, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 2/3, -2/3$, etc. Plus grand et contenant tous les

précédents, il y a les nombres algébriques, c'est-à-dire les solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers: $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique car il est l'une des deux solutions de l'équation $X^2 - 2 = 0$. On dit que $\sqrt{2}$ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - 2$.

Parmi les nombres algébriques, il y en a qu'on peut exprimer avec des radicaux (des racines carrées, des racines cubiques, etc.) mais il y en a, d'après le théorème d'Abel, qu'on ne peut pas exprimer avec des radicaux. C'est le cas, par exemple, de l'unique racine réelle du polynôme $X^5 - 3X - 1$.

Les nombres réels qui ne sont pas algébriques sont dénommés «nombres transcendants». L'idée derrière l'adjectif est simple: de tels nombres échappent à toute définition formulée en termes d'entiers et de polynômes, il doit donc être difficile d'en trouver et il est délicat de les comprendre!

IL EN EXISTE UNE INFINITÉ

La première question les concernant est bien évidemment: existe-t-il des nombres transcendants?

Une démonstration complète et n'exigeant aucun calcul (voir l'encadré 3) établit qu'il existe des nombres transcendants. Elle exploite le procédé diagonal découvert en 1891 par Georg Cantor, et permet de construire explicitement des nombres transcendants.

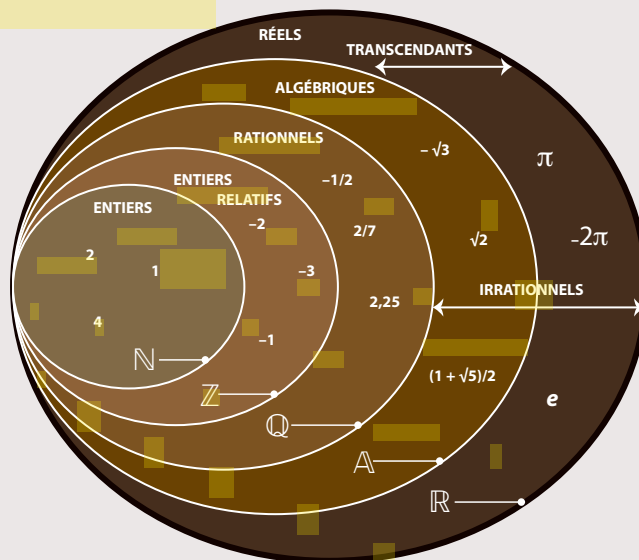
L'idée de la démonstration est simple. On prouve que l'infini des nombres algébriques est le même que celui des nombres entiers (infini qualifié de dénombrable). Sachant que l'infini des nombres réels est plus grand que celui des nombres entiers, on en déduit que la grande majorité des nombres réels sont transcendants et qu'il y en a une infinité.



Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

LES SOUS-ENSEMBLES DES NOMBRES RÉELS

1 Les entiers naturels ($\mathbb{N}$) sont les nombres les plus simples : 0, 1, 2, ... En y ajoutant les entiers négatifs, on obtient l'ensemble des « entiers relatifs » ($\mathbb{Z}$). En formant les quotients de deux tels entiers, on obtient les nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, mais c'est une solution de l'équation $X^2 - 2 = 0$. On introduit donc tous les nombres racines d'équations polynomiales à coefficients entiers, ce qui donne l'ensemble des nombres algébriques ($\mathbb{A}$). Certains nombres réels, dont π et e , ne sont pas algébriques. Par définition, ils constituent l'ensemble des nombres transcendants.



2

DÉCOUVREURS DE NOMBRES TRANSCENDANTS

Petit à petit, les mathématiciens ont perfectionné leurs méthodes, ce qui leur a permis de prouver l'existence de nouveaux nombres transcendants. Le Français Joseph Liouville (1809-1881) (a) fut le premier ; il proposa le nombre : $L = 1/10 + 1/10^{21} + 1/10^{31} + 1/10^{41} + \dots$ Puis Charles Hermite (1822-1901) (b), un Français lui aussi, démontra la transcendance de e . Ensuite,

l'Allemand Ferdinand von Lindemann (1852-1939) (c) régla le cas de π . Au xx^e siècle, le mathématicien d'origine allemande Kurt Mahler (1903-1988) (d) et, plus récemment, Yann Bugeaud (né en 1971) (e) et Boris Adamczewski (né en 1977) (f) en France ont contribué à élargir sensiblement notre compréhension des nombres transcendants.

Le procédé diagonal de Cantor utilisé pour construire un nombre transcendant a un défaut : aucune formule simple ne donne les décimales des nombres obtenus. À moins d'écrire un programme prenant les polynômes à coefficient entiers un à un, calculant leurs racines et appliquant le procédé diagonal, ce qui est possible mais exténuant, on ne sait pas très bien à quoi ressemblent les nombres transcendants obtenus. Heureusement, au xix^e siècle, le mathématicien Joseph Liouville a proposé une méthode plus directe qui produit des nombres transcendants moins énigmatiques ; ils furent d'ailleurs les premiers nombres transcendants découverts.

UN THÉORÈME DE LIOUVILLE

Justifier la méthode de Liouville exige un raisonnement et des calculs plus compliqués que la méthode de Cantor. L'idée de Liouville est cependant très intéressante. Elle est fondée sur une propriété étrange montrant que, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, les nombres algébriques irrationnels ne peuvent pas être finement approchés par des nombres rationnels, >

