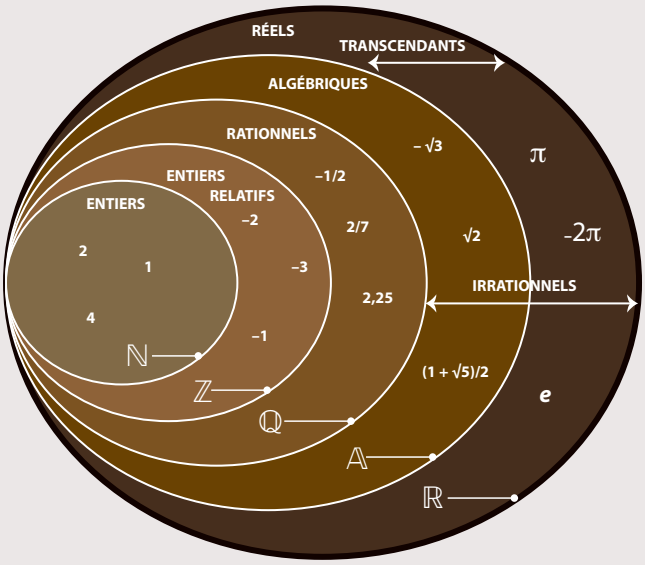
LES SOUS-ENSEMBLES DES NOMBRES RÉELS

1

Les entiers naturels (ℕ) sont les nombres les plus simples : 0, 1, 2, ... En y ajoutant les entiers négatifs, on obtient l'ensemble des « entiers relatifs » (ℤ). En formant les quotients de deux tels entiers, on obtient les nombres rationnels (ℚ). Le nombre √2 n'est pas un nombre rationnel, mais c'est une solution de l'équation $X^2 - 2 = 0$. On introduit donc tous les nombres racines d'équations polynomiales à coefficients entiers, ce qui donne l'ensemble des nombres algébriques (𝔸). Certains nombres réels, dont π et *e*, ne sont pas algébriques. Par définition, ils constituent l'ensemble des nombres transcendants.



2

DÉCOUVREURS DE NOMBRES TRANSCENDANTS

Petit à petit, les mathématiciens ont perfectionné leurs méthodes, ce qui leur a permis de prouver l'existence de nouveaux nombres transcendants. Le Français Joseph Liouville (1809-1881) *(a)* fut le premier ; il proposa le nombre : $L = 1/10 + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + 1/10^{4!} + ...$ Puis Charles Hermite (1822-1901) *(b)*, un Français lui aussi, démontra la transcendance de *e*. Ensuite, l'Allemand Ferdinand von Lindemann (1852-1939) *(c)* régla le cas de π. Au XXe siècle, le mathématicien d'origine allemande Kurt Mahler (1903-1988) *(d)* et, plus récemment, Yann Bugeaud (né en 1971) *(e)* et Boris Adamczewski (né en 1977) *(f)* en France ont contribué à élargir sensiblement notre compréhension des nombres transcendants.

Le procédé diagonal de Cantor utilisé pour construire un nombre transcendant a un défaut : aucune formule simple ne donne les décimales des nombres obtenus. À moins d'écrire un programme prenant les polynômes à coefficient entiers un à un, calculant leurs racines et appliquant le procédé diagonal, ce qui est possible mais exténuant, on ne sait pas très bien à quoi ressemblent les nombres transcendants obtenus. Heureusement, au XIXe siècle, le mathématicien Joseph Liouville a proposé une méthode plus directe qui produit des nombres transcendants moins énigmatiques ; ils furent d'ailleurs les premiers nombres transcendants découverts.

UN THÉORÈME DE LIOUVILLE

Justifier la méthode de Liouville exige un raisonnement et des calculs plus compliqués que la méthode de Cantor. L'idée de Liouville est cependant très intéressante. Elle est fondée sur une propriété étrange montrant que, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, les nombres algébriques irrationnels ne peuvent pas être finement approchés par des nombres rationnels, >

> à l'inverse de beaucoup de nombres transcendants. Approcher un nombre, c'est trouver des nombres simples qui seront de plus en plus près de lui. Par exemple approcher π, c'est proposer la suite : 3 ; 3,1 = 3/10 ; 3,14 = 314/100 ; 3,141 = 3141/1000 ; 3,1415 = 31415/10000 ; etc.

La formule infinie $\pi = 4(1-1/3+1/5-1/7+1/9+\ldots)$ permet d'approcher π à l'infini par les nombres : 4 ; $4(1-1/3) = 8/3$; $4(1-1/3+1/5) = 52/15$, $4(1-1/3+1/5-1/7) = 304/105$… En théorie, elle permet de calculer autant de décimales qu'on le souhaite de π, bien qu'en pratique elle soit très peu efficace.

Dans les deux exemples, on approche π par des nombres rationnels (des fractions) ce qui est satisfaisant car, bien sûr, grâce à la division, les chiffres d'un nombre rationnel sont toujours faciles à expliciter : approcher un nombre x se ramène à trouver des nombres rationnels, de la forme p/q, de plus en plus proches de x. Et c'est là qu'une étrange découverte a été faite par Liouville et qui a conduit à définir des exemples simples de nombres transcendants.

Le théorème de Liouville de 1844 stipule que si x n'est pas un nombre rationnel, mais est la solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers de degré n, avec $n \geq 2$, alors il existe une constante C, que l'on peut calculer, telle que tout nombre rationnel p/q s'écarte de x d'au moins C/q^n, c'est-à-dire $|x - p/q| \geq C/q^n$.

Ou encore : un nombre rationnel de dénominateur q ne peut pas s'approcher du nombre algébrique irrationnel x à moins de C/q^n, où n est le degré du polynôme dont x est racine et C une constante qui dépend de x.

Dès lors, en prenant le nombre dont le développement décimal est :

L = 0,11000100000000000000000010000… (les 1 en position 1!, 2!, 3!, 4!,…), soit

$L = 1/10 + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + 1/10^{4!} + \ldots$,

on est certain que L est un nombre transcendant, car les nombres rationnels obtenus en s'arrêtant juste derrière le k-ième 1 donne L avec une erreur inférieure à $2/10^{(k+1)!}$, ce qui est incompatible avec le théorème de Liouville.

Une insatisfaction persiste cependant : est-ce que certains nombres connus, et non pas des nombres artificiels comme ceux donnés par Cantor et Liouville, sont transcendants ?

DES NOMBRES TRANSCENDANTS À LA PELLE

Une multitude de résultats ont progressivement permis de répondre oui.

Le premier est dû à Charles Hermite, qui démontra en 1873 que la base e des logarithmes naturels, $e = 2,71828\ldots = 1+1/1!+1/2!+1/3!+\ldots$, est transcendant. Il fut suivi en 1882 par celui de Ferdinand von Lindemann, qui démontra que le nombre π est transcendant. Ce dernier résultat a pour conséquence que le problème

3 PREUVE DE L'EXISTENCE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

La démonstration de l'existence de nombres transcendants peut se faire sans calcul. Ce n'est pas la première démonstration de l'existence de ces nombres, mais c'est la plus facile à comprendre.

Étape 1. On attribue à chaque polynôme à coefficients entiers un poids en faisant la somme des valeurs absolues de ses coefficients et de son degré. Par exemple, le polynôme $3X^5 - 7X + 1$ a le poids $3 + 7 + 1 + 5 = 16$.
Pour un entier n fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes à coefficients entiers de poids n. En effet, pour avoir le poids n, le polynôme doit avoir un degré inférieur ou égal à n, et ses coefficients entiers (au plus $n + 1$) doivent avoir une valeur absolue inférieure ou égale à n. Cela permet de classer tous les polynômes à coefficients entiers dans une liste unique :
– On prend d'abord les polynômes de poids 1. Il n'y a que 1 et – 1 (aucun n'a de racine).
– On prend ensuite les polynômes de poids 2. Il y en a quatre : 2 ; – 2 ; X ; – X (le polynôme X a pour racine 0, de même que le polynôme – X).
– On prend ensuite les polynômes de poids 3. Il y en a dix : 3 ; – 3 ; $2X$; – $2X$; $X + 1$; – $X + 1$; $X - 1$; – $X - 1$; X^2 ; – X^2. Et ainsi de suite. À chaque niveau, on ordonne les polynômes. Notons $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$, $P_3(X)$, … cette liste de tous les polynômes à coefficients entiers. Les nombres réels solutions d'une équation $P_i(X) = 0$ sont en nombre fini car un polynôme de degré n possède au plus n racines. Classons ces solutions en une liste (certains nombres apparaîtront plusieurs fois, mais c'est sans importance) en prenant par ordre croissant les solutions réelles de l'équation $P_0(X) = 0$ (s'il y en a), puis celles de l'équation $P_1(X) = 0$ (s'il y en a), etc. On obtient ainsi la liste s_0, s_1, s_2, s_3, … de tous les nombres réels solutions des équations de la forme $P(X) = 0$ où $P(X)$ est un polynôme à coefficients entiers, autrement dit on obtient la liste de tous les nombres algébriques. Cette partie du raisonnement démontre que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable, c'est-à-dire associable, dans une correspondance terme à terme, à l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2, ….

Étape 2. Considérons maintenant le nombre réel $r = 0, c_0\, c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots$ dont le premier chiffre décimal après la virgule, c_0, est choisi différent du premier chiffre décimal après la virgule de s_0 (on convient par exemple de prendre 1 si ce premier chiffre diffère de 1, et 2 sinon), dont le deuxième chiffre décimal après la virgule, c_1, est choisi différent du deuxième chiffre après la virgule de s_1 (même principe de choix), etc. Pour éviter certaines complications dues aux égalités du genre 1 = 0,9999…, il est important de choisir c_i toujours différent de 0 et de 9. Le nombre r qu'on vient de définir explicitement et dont les chiffres pourraient être produits un à un par un programme est différent, par construction, de tout nombre algébrique. C'est donc un nombre transcendant. Cette partie du raisonnement est l'application du procédé de « diagonalisation » de Cantor à l'ensemble des nombres algébriques.

Il existe une infinité non dénombrable de nombres transcendants. Voir sur ce sujet l'article de Robert Gray, « Georg Cantor and transcendental numbers » (*The American Mathematical Monthly*, vol. 101(9), pp. 819-832, 1994) qui explique comment les auteurs ont programmé la création d'un nombre transcendant par la méthode de Cantor et où ils démontrent que tout nombre transcendant est le résultat d'une telle diagonalisation à partir des nombres algébriques.