> à l'inverse de beaucoup de nombres transcendants. Approcher un nombre, c'est trouver des nombres simples qui seront de plus en plus près de lui. Par exemple approcher π, c'est proposer la suite : 3 ; 3,1 = 3/10 ; 3,14 = 314/100 ; 3,141 = 3141/1000 ; 3,1415 = 31415/10000 ; etc.

La formule infinie $\pi = 4(1-1/3+1/5-1/7+1/9+\ldots)$ permet d'approcher π à l'infini par les nombres : 4 ; $4(1-1/3) = 8/3$; $4(1-1/3+1/5) = 52/15$, $4(1-1/3+1/5-1/7) = 304/105$… En théorie, elle permet de calculer autant de décimales qu'on le souhaite de π, bien qu'en pratique elle soit très peu efficace.

Dans les deux exemples, on approche π par des nombres rationnels (des fractions) ce qui est satisfaisant car, bien sûr, grâce à la division, les chiffres d'un nombre rationnel sont toujours faciles à expliciter : approcher un nombre x se ramène à trouver des nombres rationnels, de la forme p/q, de plus en plus proches de x. Et c'est là qu'une étrange découverte a été faite par Liouville et qui a conduit à définir des exemples simples de nombres transcendants.

Le théorème de Liouville de 1844 stipule que si x n'est pas un nombre rationnel, mais est la solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers de degré n, avec $n \geq 2$, alors il existe une constante C, que l'on peut calculer, telle que tout nombre rationnel p/q s'écarte de x d'au moins C/q^n, c'est-à-dire $|x - p/q| \geq C/q^n$.

Ou encore : un nombre rationnel de dénominateur q ne peut pas s'approcher du nombre algébrique irrationnel x à moins de C/q^n, où n est le degré du polynôme dont x est racine et C une constante qui dépend de x.

Dès lors, en prenant le nombre dont le développement décimal est :

L = 0,11000100000000000000000010000… (les 1 en position 1!, 2!, 3!, 4!,…), soit

$L = 1/10 + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + 1/10^{4!} + \ldots$,

on est certain que L est un nombre transcendant, car les nombres rationnels obtenus en s'arrêtant juste derrière le k-ième 1 donne L avec une erreur inférieure à $2/10^{(k+1)!}$, ce qui est incompatible avec le théorème de Liouville.

Une insatisfaction persiste cependant : est-ce que certains nombres connus, et non pas des nombres artificiels comme ceux donnés par Cantor et Liouville, sont transcendants ?

DES NOMBRES TRANSCENDANTS À LA PELLE

Une multitude de résultats ont progressivement permis de répondre oui.

Le premier est dû à Charles Hermite, qui démontra en 1873 que la base e des logarithmes naturels, $e = 2,71828\ldots = 1+1/1!+1/2!+1/3!+\ldots$, est transcendant. Il fut suivi en 1882 par celui de Ferdinand von Lindemann, qui démontra que le nombre π est transcendant. Ce dernier résultat a pour conséquence que le problème

3 PREUVE DE L'EXISTENCE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

La démonstration de l'existence de nombres transcendants peut se faire sans calcul. Ce n'est pas la première démonstration de l'existence de ces nombres, mais c'est la plus facile à comprendre.

Étape 1. On attribue à chaque polynôme à coefficients entiers un poids en faisant la somme des valeurs absolues de ses coefficients et de son degré. Par exemple, le polynôme $3X^5 - 7X + 1$ a le poids $3 + 7 + 1 + 5 = 16$.
Pour un entier n fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes à coefficients entiers de poids n. En effet, pour avoir le poids n, le polynôme doit avoir un degré inférieur ou égal à n, et ses coefficients entiers (au plus $n + 1$) doivent avoir une valeur absolue inférieure ou égale à n. Cela permet de classer tous les polynômes à coefficients entiers dans une liste unique :
– On prend d'abord les polynômes de poids 1. Il n'y a que 1 et – 1 (aucun n'a de racine).
– On prend ensuite les polynômes de poids 2. Il y en a quatre : 2 ; – 2 ; X ; – X (le polynôme X a pour racine 0, de même que le polynôme – X).
– On prend ensuite les polynômes de poids 3. Il y en a dix : 3 ; – 3 ; $2X$; – $2X$; $X + 1$; – $X + 1$; $X - 1$; – $X - 1$; X^2 ; – X^2. Et ainsi de suite. À chaque niveau, on ordonne les polynômes. Notons $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$, $P_3(X)$, … cette liste de tous les polynômes à coefficients entiers. Les nombres réels solutions d'une équation $P_i(X) = 0$ sont en nombre fini car un polynôme de degré n possède au plus n racines. Classons ces solutions en une liste (certains nombres apparaîtront plusieurs fois, mais c'est sans importance) en prenant par ordre croissant les solutions réelles de l'équation $P_0(X) = 0$ (s'il y en a), puis celles de l'équation $P_1(X) = 0$ (s'il y en a), etc. On obtient ainsi la liste s_0, s_1, s_2, s_3, … de tous les nombres réels solutions des équations de la forme $P(X) = 0$ où $P(X)$ est un polynôme à coefficients entiers, autrement dit on obtient la liste de tous les nombres algébriques. Cette partie du raisonnement démontre que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable, c'est-à-dire associable, dans une correspondance terme à terme, à l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2, ….

Étape 2. Considérons maintenant le nombre réel $r = 0, c_0\, c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots$ dont le premier chiffre décimal après la virgule, c_0, est choisi différent du premier chiffre décimal après la virgule de s_0 (on convient par exemple de prendre 1 si ce premier chiffre diffère de 1, et 2 sinon), dont le deuxième chiffre décimal après la virgule, c_1, est choisi différent du deuxième chiffre après la virgule de s_1 (même principe de choix), etc. Pour éviter certaines complications dues aux égalités du genre 1 = 0,9999…, il est important de choisir c_i toujours différent de 0 et de 9. Le nombre r qu'on vient de définir explicitement et dont les chiffres pourraient être produits un à un par un programme est différent, par construction, de tout nombre algébrique. C'est donc un nombre transcendant. Cette partie du raisonnement est l'application du procédé de « diagonalisation » de Cantor à l'ensemble des nombres algébriques.

Il existe une infinité non dénombrable de nombres transcendants. Voir sur ce sujet l'article de Robert Gray, « Georg Cantor and transcendental numbers » (*The American Mathematical Monthly*, vol. 101(9), pp. 819-832, 1994) qui explique comment les auteurs ont programmé la création d'un nombre transcendant par la méthode de Cantor et où ils démontrent que tout nombre transcendant est le résultat d'une telle diagonalisation à partir des nombres algébriques.

de la quadrature du cercle est impossible à résoudre. Posé par Anaxagore vers 430 avant notre ère, ce problème consiste à partir d'un cercle C dessiné sur un plan et, en n'utilisant qu'une règle (non graduée) et un compas, à dessiner un carré dont l'aire soit égale à l'aire du disque délimité par C. On avait démontré auparavant que si une telle construction existe, alors cela implique que π est algébrique. Par conséquent, si π est transcendant, c'est que la construction à la règle et au compas est impossible. Inutile d'en poursuivre la recherche !

Depuis ces résultats sur e et π, une multitude d'autres nombres transcendants précis ont été identifiés.

Si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est transcendant (von Lindemann, 1882). En passant par les nombres complexes, on en déduit que $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$ sont transcendants quand x est algébrique non nul.

Si x est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 et si y est un nombre algébrique irrationnel, alors le nombre x^y est transcendant (Alexandre Gelfond et Theodor Schneider, 1934). En particulier $2^{\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, etc. sont des nombres transcendants. On en tire, à nouveau en passant par les nombres complexes, que e^π est transcendant.

Le nombre de Champernowne, à savoir 0,12345678910111213..., obtenu en écrivant les uns derrière les autres la suite les entiers naturels en base 10 est transcendant (Kurt Mahler, 1937). De même, le nombre obtenu en mettant les uns derrière les autres les carrés des nombres entiers, 0,14916253649..., est transcendant.

La constante de Prouhet-Thue-Morse est le nombre dont le développement en base 2 est 0,0110100110010110... Le n-ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture en binaire de n comporte un nombre pair de 1, et c'est un 1 sinon. La suite des chiffres après la virgule se définit aussi de la manière suivante : on part de 0, on y ajoute le complément 1, ce qui donne 01, on y ajoute encore le complément 10, ce qui donne 0110, puis 01101001, puis 0110100110010110, etc. La constante de Prouhet-Thue-Morse est un nombre transcendant (Kurt Mahler, 1929).

Plus généralement, les nombres réels dont le développement en une base de numération b est une suite automatique (c'est-à-dire produite par un automate à mémoire finie, *voir l'encadré 4*) non périodique à partir d'un certain rang sont transcendants (Boris Adamczewski, Yann Bugeaud, 2007).

Les nombres non calculables par algorithme, dont Alan Turing a montré l'existence en 1936, sont des nombres transcendants car les nombres algébriques sont calculables. La constante Ω de Gregory Chaitin, qui est non calculable, est un nombre transcendant, ainsi que le nombre obtenu en ne gardant du développement >

4

LES NOMBRES AUTOMATIQUES

Soupçonné par John Loxton et Alf van der Poorten en 1982, et finalement démontré par les mathématiciens français Boris Adamczewski et Yann Bugeaud en 2007, un résultat remarquable indique que les nombres dont les chiffres en une base de numération donnée *b* sont *b*-automatiques sont soit des nombres rationnels, soit des nombres transcendants. Un nombre $0,c_0c_1c_2...$ écrit en base *b* est *b*-automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer c_n (voir deux exemples plus bas).

Le résultat signifie que si un nombre a un développement simple à calculer, alors soit il est lui-même simple, car quotient de deux entiers (c'est un rationnel), soit c'est un nombre transcendant. En conséquence, et c'est assez inattendu, les nombres algébriques irrationnels comme $\sqrt{2}$ ont nécessairement des développements compliqués à calculer.

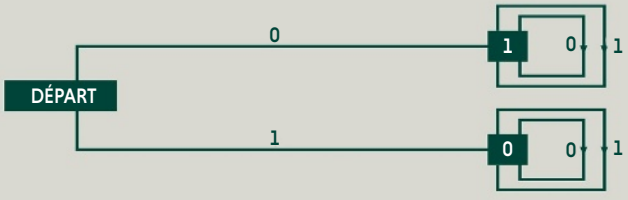
Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un est un nombre rationnel, l'autre est un nombre transcendant. Le nombre rationnel 2/3, qui s'écrit 0,101010101... en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le *n*-ième chiffre de son développement binaire (on compte à partir de 0), il suffit d'utiliser le premier automate représenté ci-dessous.

On se place sur le graphe de l'automate en position de départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres binaires de *n* en suivant la flèche correspondante au chiffre lu. Le nom du nœud auquel on arrive quand on a fini de lire *n* indique le chiffre numéro *n* du développement de 2/3.

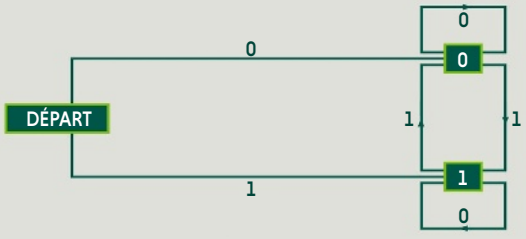
Exemple : pour connaître le chiffre c_6 de $2/3 = 0,c_0c_1...$, on écrit 6 en base 2, soit 110, on se place au nœud « Départ », puis on suit les flèches marquées 0, 1, 1. Cela nous conduit au nœud [1] : le chiffre c_6 de 2/3 écrit en base 2 est un 1.

Le nombre de Thue-Morse 0,01101001100101101001... où le *n*-ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture binaire de *n* comporte un nombre pair de 1, et est un 1 sinon. Ce nombre est défini par l'automate figuré en bas.

En informatique, on envisage des modèles de calculs plus complexes que les automates finis servant à définir les nombres automatiques. Pour certains de ces modèles, des généralisations du résultat mentionné ici ont été obtenues en 2020 par les chercheurs français Boris Adamczewski, Julien Cassaigne et Marion Le Gonidec (*voir la bibliographie*).



AUTOMATE POUR 2/3 = 0,1010101010...



AUTOMATE POUR 0,0110100110010110...