

4

LES NOMBRES AUTOMATIQUES

de la quadrature du cercle est impossible à résoudre. Posé par Anaxagore vers 430 avant notre ère, ce problème consiste à partir d'un cercle C dessiné sur un plan et, en n'utilisant qu'une règle (non graduée) et un compas, à dessiner un carré dont l'aire soit égale à l'aire du disque délimité par C . On avait démontré auparavant que si une telle construction existe, alors cela implique que π est algébrique. Par conséquent, si π est transcendant, c'est que la construction à la règle et au compas est impossible. Inutile d'en poursuivre la recherche !

Depuis ces résultats sur e et π , une multitude d'autres nombres transcendants précis ont été identifiés.

Si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est transcendant (von Lindemann, 1882). En passant par les nombres complexes, on en déduit que $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ sont transcendants quand x est algébrique non nul.

Si x est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 et si y est un nombre algébrique irrationnel, alors le nombre x^y est transcendant (Alexandre Gelfond et Theodor Schneider, 1934). En particulier $2^{\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, etc. sont des nombres transcendants. On en tire, à nouveau en passant par les nombres complexes, que e^{π} est transcendant.

Le nombre de Champernowne, à savoir 0,12345678910111213..., obtenu en écrivant les uns derrière les autres la suite des entiers naturels en base 10 est transcendant (Kurt Mahler, 1937). De même, le nombre obtenu en mettant les uns derrière les autres les carrés des nombres entiers, 0,14916253649..., est transcendant.

La constante de Prouhet-Thue-Morse est le nombre dont le développement en base 2 est 0,0110100110010110... Le n -ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture en binaire de n comporte un nombre pair de 1, et c'est un 1 sinon. La suite des chiffres après la virgule se définit aussi de la manière suivante: on part de 0, on y ajoute le complément 1, ce qui donne 01, on y ajoute encore le complément 10, ce qui donne 0110, puis 01101001, puis 0110100110010110, etc. La constante de Prouhet-Thue-Morse est un nombre transcendant (Kurt Mahler, 1929).

Plus généralement, les nombres réels dont le développement en une base de numération b est une suite automatique (c'est-à-dire produite par un automate à mémoire finie, voir l'encadré 4) non périodique à partir d'un certain rang sont transcendants (Boris Adamczewski, Yann Bugeaud, 2007).

Les nombres non calculables par algorithme, dont Alan Turing a montré l'existence en 1936, sont des nombres transcendants car les nombres algébriques sont calculables. La constante Ω de Gregory Chaitin, qui est non calculable, est un nombre transcendant, ainsi que le nombre obtenu en ne gardant du développement

Soupçonné par John Loxton et Alf van der Poorten en 1982, et finalement démontré par les mathématiciens français Boris Adamczewski et Yann Bugeaud en 2007, un résultat remarquable indique que les nombres dont les chiffres en une base de numération donnée b sont b -automatiques sont soit des nombres rationnels, soit des nombres transcendants. Un nombre $0, c_0 c_1 c_2 \dots$ écrit en base b est b -automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer c_n (voir deux exemples plus bas).

Le résultat signifie que si un nombre a un développement simple à calculer, alors soit il est lui-même simple, car quotient de deux entiers (c'est un rationnel), soit c'est un nombre transcendant. En conséquence, et c'est assez inattendu, les nombres algébriques irrationnels comme $\sqrt{2}$ ont nécessairement des développements compliqués à calculer.

Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un est un nombre rationnel, l'autre est un nombre transcendant. Le nombre rationnel $2/3$, qui s'écrit 0,10101010... en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le n -ième chiffre de son développement binaire (on compte à partir de 0), il suffit

d'utiliser le premier automate représenté ci-dessous.

On se place sur le graphe de l'automate en position de départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres binaires de n en suivant la flèche correspondante au chiffre lu. Le nom du nœud auquel on arrive quand on a fini de lire n indique le chiffre numéro n du développement de $2/3$.

Exemple : pour connaître le chiffre c_n de $2/3 = 0, c_0 c_1 \dots$, on écrit 6 en base 2, soit 110, on se place au nœud « Départ », puis on suit les flèches marquées 0, 1, 1. Cela nous conduit au nœud [1] : le chiffre c_6 de $2/3$ écrit en base 2 est un 1.

Le nombre de Thue-Morse 0,0110100110010110... où le n -ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture binaire de n comporte un nombre pair de 1, et est un 1 sinon. Ce nombre est défini par l'automate figuré en bas.

En informatique, on envisage des modèles de calculs plus complexes que les automates finis servant à définir les nombres automatiques. Pour certains de ces modèles, des généralisations du résultat mentionné ici ont été obtenues en 2020 par les chercheurs français Boris Adamczewski, Julien Cassaigne et Marion Le Gonidec (voir la bibliographie).

