

4

LES NOMBRES AUTOMATIQUES

de la quadrature du cercle est impossible à résoudre. Posé par Anaxagore vers 430 avant notre ère, ce problème consiste à partir d'un cercle C dessiné sur un plan et, en n'utilisant qu'une règle (non graduée) et un compas, à dessiner un carré dont l'aire soit égale à l'aire du disque délimité par C . On avait démontré auparavant que si une telle construction existe, alors cela implique que π est algébrique. Par conséquent, si π est transcendant, c'est que la construction à la règle et au compas est impossible. Inutile d'en poursuivre la recherche !

Depuis ces résultats sur e et π , une multitude d'autres nombres transcendants précis ont été identifiés.

Si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est transcendant (von Lindemann, 1882). En passant par les nombres complexes, on en déduit que $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ sont transcendants quand x est algébrique non nul.

Si x est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 et si y est un nombre algébrique irrationnel, alors le nombre x^y est transcendant (Alexandre Gelfond et Theodor Schneider, 1934). En particulier $2^{\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, etc. sont des nombres transcendants. On en tire, à nouveau en passant par les nombres complexes, que e^{π} est transcendant.

Le nombre de Champernowne, à savoir 0,12345678910111213..., obtenu en écrivant les uns derrière les autres la suite des entiers naturels en base 10 est transcendant (Kurt Mahler, 1937). De même, le nombre obtenu en mettant les uns derrière les autres les carrés des nombres entiers, 0,14916253649..., est transcendant.

La constante de Prouhet-Thue-Morse est le nombre dont le développement en base 2 est 0,0110100110010110... Le n -ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture en binaire de n comporte un nombre pair de 1, et c'est un 1 sinon. La suite des chiffres après la virgule se définit aussi de la manière suivante: on part de 0, on y ajoute le complément 1, ce qui donne 01, on y ajoute encore le complément 10, ce qui donne 0110, puis 01101001, puis 0110100110010110, etc. La constante de Prouhet-Thue-Morse est un nombre transcendant (Kurt Mahler, 1929).

Plus généralement, les nombres réels dont le développement en une base de numération b est une suite automatique (c'est-à-dire produite par un automate à mémoire finie, voir l'encadré 4) non périodique à partir d'un certain rang sont transcendants (Boris Adamczewski, Yann Bugeaud, 2007).

Les nombres non calculables par algorithme, dont Alan Turing a montré l'existence en 1936, sont des nombres transcendants car les nombres algébriques sont calculables. La constante Ω de Gregory Chaitin, qui est non calculable, est un nombre transcendant, ainsi que le nombre obtenu en ne gardant du développement

Soupçonné par John Loxton et Alf van der Poorten en 1982, et finalement démontré par les mathématiciens français Boris Adamczewski et Yann Bugeaud en 2007, un résultat remarquable indique que les nombres dont les chiffres en une base de numération donnée b sont b -automatiques sont soit des nombres rationnels, soit des nombres transcendants. Un nombre $0, c_0 c_1 c_2 \dots$ écrit en base b est b -automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer c_n (voir deux exemples plus bas).

Le résultat signifie que si un nombre a un développement simple à calculer, alors soit il est lui-même simple, car quotient de deux entiers (c'est un rationnel), soit c'est un nombre transcendant. En conséquence, et c'est assez inattendu, les nombres algébriques irrationnels comme $\sqrt{2}$ ont nécessairement des développements compliqués à calculer.

Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un est un nombre rationnel, l'autre est un nombre transcendant. Le nombre rationnel $2/3$, qui s'écrit 0,10101010... en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le n -ième chiffre de son développement binaire (on compte à partir de 0), il suffit

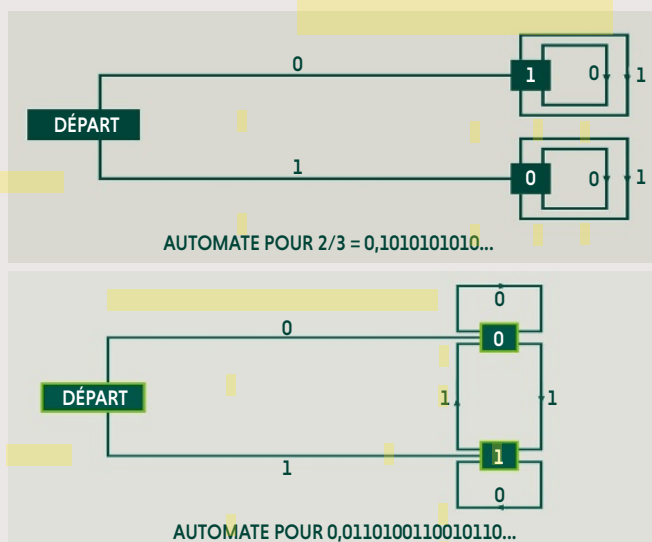
d'utiliser le premier automate représenté ci-dessous.

On se place sur le graphe de l'automate en position de départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres binaires de n en suivant la flèche correspondante au chiffre lu. Le nom du nœud auquel on arrive quand on a fini de lire n indique le chiffre numéroté n du développement de $2/3$.

Exemple : pour connaître le chiffre c_6 de $2/3 = 0, c_0 c_1 \dots$, on écrit 6 en base 2, soit 110, on se place au nœud « Départ », puis on suit les flèches marquées 0, 1, 1. Cela nous conduit au nœud [1] : le chiffre c_6 de $2/3$ écrit en base 2 est un 1.

Le nombre de Thue-Morse 0,011010011001011001... où le n -ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture binaire de n comporte un nombre pair de 1, et est un 1 sinon. Ce nombre est défini par l'automate figuré en bas.

En informatique, on envisage des modèles de calculs plus complexes que les automates finis servant à définir les nombres automatiques. Pour certains de ces modèles, des généralisations du résultat mentionné ici ont été obtenues en 2020 par les chercheurs français Boris Adamczewski, Julien Cassaigne et Marion Le Gonidec (voir la bibliographie).



> décimal de Ω que les chiffres de rang pair, ou que les chiffres de rang multiple de 3, etc.

La fraction continue (voir l'encadré 5) dont la suite des coefficients est la suite de Prouhet-Thue-Morse, avec des 1 et des 2 à la place des 0 et des 1, est un nombre transcendant (Martine Queffélec, 1998), de même que toute fraction continue dont la suite des coefficients n'est pas périodique à partir d'un certain rang et qui est automatique (Yann Bugeaud, 2013), ou qui commence une infinité de fois par un palindrome (Boris Adamczewski et Yann Bugeaud, 2007) (voir un exemple dans l'encadré 6).

MIEUX QUE LE THÉORÈME DE LIOUVILLE

Revenons au résultat de Liouville sur la difficulté d'approcher les nombres algébriques. Il a été amélioré en 1955 par le mathématicien britannique Klaus Roth (mort en 2015). Le nouveau résultat, qui a donc attendu plus d'un siècle, constitue un progrès fantastique, qui a valu à Roth une médaille Fields en 1958 :

Si un nombre irrationnel x peut être approché une infinité de fois par des fractions p/q à mieux que $1/q^{2+a}$ près pour un a positif, alors x n'est pas algébrique.

Le théorème de Liouville disait qu'on ne peut pas approcher un nombre algébrique irrationnel avec des rationnels de la forme p/q avec une précision de l'ordre de $1/q^n$, si n est le degré du polynôme dont x est racine. On sait désormais que c'est vrai en remplaçant n par $2+a$, même si a est un nombre positif très petit.

Formulons encore autrement le résultat de Roth : en utilisant des rationnels p/q , on ne peut approcher à l'infini un nombre algébrique irrationnel x (par exemple $\sqrt{2}$) à mieux que $1/q^2$ près ; si l'on peut faire mieux, c'est-à-dire

en remplaçant le 2 par $2+a$ avec a positif ($1/q^{2+a}$ est alors plus petit que $1/q^2$), c'est qu'on a affaire à un nombre transcendant.

Décidément, les nombres algébriques sont très difficilement approchables !

Du côté des transcendants, on sait parfois les approcher mieux qu'avec une précision de $1/q^2$ et, dans le cas du nombre de Liouville L , on sait même qu'on peut les approcher avec une précision de $1/q^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Est-ce la même chose pour tous les nombres transcendants ? La réponse est non : pour cette capacité à approcher les transcendants, il existe une variété infinie de situations.

Pour traiter cette question, nous utiliserons l'exposant de q dans de la fraction $1/q^n$ comme moyen de classer les nombres transcendants. Cela conduit à la définition de la « mesure d'irrationalité » d'un nombre. C'est un peu compliqué, mais juste après la définition, nous verrons des exemples qui permettront facilement de la comprendre.

MESURE D'IRRATIONALITÉ D'UN NOMBRE RÉEL

Soit x un nombre réel. On considère l'ensemble des nombres y tels qu'il est impossible d'approcher x par une infinité de rationnels p/q avec une précision de $1/q^y$.

Si un y est dans cet ensemble, les y' supérieurs à y sont aussi dans cet ensemble. Cet ensemble est donc un intervalle de la forme $[z, +\infty)$ (tous les y tels que $y \geq z$) ou de la forme $]z, +\infty)$ (tous les y tels que $y > z$). Ce z situé à l'extrémité basse de l'intervalle infini est la « mesure d'irrationalité de x », que l'on notera $ir(x)$. Si on peut approcher x avec une précision de $1/q^y$ pour tout nombre y , on dira que $ir(x) = +\infty$.

Avec cette notion, le théorème de Roth s'exprime simplement : les nombres qui ont

LES FRACTIONS CONTINUES

5

À côté des développements en base de numération b comme les développements décimaux ($b = 10$) ou binaires ($b = 2$), il existe un type moins connu mais très important de développement d'un nombre réel : les développements en fraction continue. Un nombre x étant donné, on utilise la notation $x = [a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ pour l'expression :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

où les a_i sont des nombres entiers. Tout nombre réel positif s'écrit sous cette forme. Les nombres rationnels

sont les nombres réels dont le développement en fraction continue est fini (les a_i sont nuls à partir d'un certain rang n). Le nombre d'or, $(1+\sqrt{5})/2$, a le plus simple des développements infinis : $(1+\sqrt{5})/2 = [1 ; 1, 1, 1, \dots]$.

Lorsque le développement en fraction continue est assez simple, le nombre correspondant x se révèle transcendant. Voici deux très beaux résultats généraux récents là-dessus.

– Si la suite a_i est automatique (voir l'encadré 4) et n'est pas périodique à partir d'un certain n , alors x est transcendant (Bugeaud, 2013). Le nombre dont le développement en fraction continue est la suite de Prouhet-Thue-Morse $[0 ; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots]$ est donc transcendant.

– Si les débuts de la suite a_i sont une infinité de fois un palindrome, alors x est transcendant (Adamczewski et Bugeaud, 2007). Exemple : $x = [0 ; 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 4, 4, 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 5, 5, \dots]$.

La mesure d'irrationalité $ir(x)$ d'un nombre réel x (voir le texte principal) est liée à la suite a_i des entiers de son développement en fraction continue. C'est ce qu'indique un résultat classique : $ir(x)$ est la limite de la suite extraite de la suite $(2 + \ln(q_{n+1})/\ln(q_n))$ qui converge vers la plus grande valeur possible, où q_n est le dénominateur du nombre rationnel p_n/q_n obtenu en calculant la fraction continue finie $[a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n]$.