

> décimal de Ω que les chiffres de rang pair, ou que les chiffres de rang multiple de 3, etc.

La fraction continue (voir l'encadré 5) dont la suite des coefficients est la suite de Prouhet-Thue-Morse, avec des 1 et des 2 à la place des 0 et des 1, est un nombre transcendant (Martine Queffélec, 1998), de même que toute fraction continue dont la suite des coefficients n'est pas périodique à partir d'un certain rang et qui est automatique (Yann Bugeaud, 2013), ou qui commence une infinité de fois par un palindrome (Boris Adamczewski et Yann Bugeaud, 2007) (voir un exemple dans l'encadré 6).

MIEUX QUE LE THÉORÈME DE LIOUVILLE

Revenons au résultat de Liouville sur la difficulté d'approcher les nombres algébriques. Il a été amélioré en 1955 par le mathématicien britannique Klaus Roth (mort en 2015). Le nouveau résultat, qui a donc attendu plus d'un siècle, constitue un progrès fantastique, qui a valu à Roth une médaille Fields en 1958 :

Si un nombre irrationnel x peut être approché une infinité de fois par des fractions p/q à mieux que $1/q^{2+a}$ près pour un a positif, alors x n'est pas algébrique.

Le théorème de Liouville disait qu'on ne peut pas approcher un nombre algébrique irrationnel avec des rationnels de la forme p/q avec une précision de l'ordre de $1/q^n$, si n est le degré du polynôme dont x est racine. On sait désormais que c'est vrai en remplaçant n par $2+a$, même si a est un nombre positif très petit.

Formulons encore autrement le résultat de Roth : en utilisant des rationnels p/q , on ne peut approcher à l'infini un nombre algébrique irrationnel x (par exemple $\sqrt{2}$) à mieux que $1/q^2$ près ; si l'on peut faire mieux, c'est-à-dire

en remplaçant le 2 par $2+a$ avec a positif ($1/q^{2+a}$ est alors plus petit que $1/q^2$), c'est qu'on a affaire à un nombre transcendant.

Décidément, les nombres algébriques sont très difficilement approchables !

Du côté des transcendants, on sait parfois les approcher mieux qu'avec une précision de $1/q^2$ et, dans le cas du nombre de Liouville L , on sait même qu'on peut les approcher avec une précision de $1/q^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Est-ce la même chose pour tous les nombres transcendants ? La réponse est non : pour cette capacité à approcher les transcendants, il existe une variété infinie de situations.

Pour traiter cette question, nous utiliserons l'exposant de q dans de la fraction $1/q^n$ comme moyen de classer les nombres transcendants. Cela conduit à la définition de la « mesure d'irrationalité » d'un nombre. C'est un peu compliqué, mais juste après la définition, nous verrons des exemples qui permettront facilement de la comprendre.

MESURE D'IRRATIONALITÉ D'UN NOMBRE RÉEL

Soit x un nombre réel. On considère l'ensemble des nombres y tels qu'il est impossible d'approcher x par une infinité de rationnels p/q avec une précision de $1/q^y$.

Si un y est dans cet ensemble, les y' supérieurs à y sont aussi dans cet ensemble. Cet ensemble est donc un intervalle de la forme $[z, +\infty)$ (tous les y tels que $y \geq z$) ou de la forme $]z, +\infty)$ (tous les y tels que $y > z$). Ce z situé à l'extrémité basse de l'intervalle infini est la « mesure d'irrationalité de x », que l'on notera $ir(x)$. Si on peut approcher x avec une précision de $1/q^y$ pour tout nombre y , on dira que $ir(x) = +\infty$.

Avec cette notion, le théorème de Roth s'exprime simplement : les nombres qui ont

LES FRACTIONS CONTINUES

5

À côté des développements en base de numération b comme les développements décimaux ($b = 10$) ou binaires ($b = 2$), il existe un type moins connu mais très important de développement d'un nombre réel : les développements en fraction continue. Un nombre x étant donné, on utilise la notation $x = [a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ pour l'expression :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

où les a_i sont des nombres entiers. Tout nombre réel positif s'écrit sous cette forme. Les nombres rationnels

sont les nombres réels dont le développement en fraction continue est fini (les a_i sont nuls à partir d'un certain rang n). Le nombre d'or, $(1+\sqrt{5})/2$, a le plus simple des développements infinis : $(1+\sqrt{5})/2 = [1 ; 1, 1, 1, \dots]$.

Lorsque le développement en fraction continue est assez simple, le nombre correspondant x se révèle transcendant. Voici deux très beaux résultats généraux récents là-dessus.

– Si la suite a_i est automatique (voir l'encadré 4) et n'est pas périodique à partir d'un certain n , alors x est transcendant (Bugeaud, 2013). Le nombre dont le développement en fraction continue est la suite de Prouhet-Thue-Morse $[0 ; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots]$ est donc transcendant.

– Si les débuts de la suite a_i sont une infinité de fois un palindrome, alors x est transcendant (Adamczewski et Bugeaud, 2007). Exemple : $x = [0 ; 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 4, 4, 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 5, 5, \dots]$.

La mesure d'irrationalité $ir(x)$ d'un nombre réel x (voir le texte principal) est liée à la suite a_i des entiers de son développement en fraction continue. C'est ce qu'indique un résultat classique : $ir(x)$ est la limite de la suite extraite de la suite $(2 + \ln(q_{n+1})/\ln(q_n))$ qui converge vers la plus grande valeur possible, où q_n est le dénominateur du nombre rationnel p_n/q_n obtenu en calculant la fraction continue finie $[a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n]$.