

> décimal de Ω que les chiffres de rang pair, ou que les chiffres de rang multiple de 3, etc.

La fraction continue (voir l'encadré 5) dont la suite des coefficients est la suite de Prouhet-Thue-Morse, avec des 1 et des 2 à la place des 0 et des 1, est un nombre transcendant (Martine Queffélec, 1998), de même que toute fraction continue dont la suite des coefficients n'est pas périodique à partir d'un certain rang et qui est automatique (Yann Bugeaud, 2013), ou qui commence une infinité de fois par un palindrome (Boris Adamczewski et Yann Bugeaud, 2007) (voir un exemple dans l'encadré 6).

MIEUX QUE LE THÉORÈME DE LIOUVILLE

Revenons au résultat de Liouville sur la difficulté d'approcher les nombres algébriques. Il a été amélioré en 1955 par le mathématicien britannique Klaus Roth (mort en 2015). Le nouveau résultat, qui a donc attendu plus d'un siècle, constitue un progrès fantastique, qui a valu à Roth une médaille Fields en 1958 :

Si un nombre irrationnel x peut être approché une infinité de fois par des fractions p/q à mieux que $1/q^{2+a}$ près pour un a positif, alors x n'est pas algébrique.

Le théorème de Liouville disait qu'on ne peut pas approcher un nombre algébrique irrationnel avec des rationnels de la forme p/q avec une précision de l'ordre de $1/q^n$, si n est le degré du polynôme dont x est racine. On sait désormais que c'est vrai en remplaçant n par $2+a$, même si a est un nombre positif très petit.

Formulons encore autrement le résultat de Roth : en utilisant des rationnels p/q , on ne peut approcher à l'infini un nombre algébrique irrationnel x (par exemple $\sqrt{2}$) à mieux que $1/q^2$ près ; si l'on peut faire mieux, c'est-à-dire

en remplaçant le 2 par $2+a$ avec a positif ($1/q^{2+a}$ est alors plus petit que $1/q^2$), c'est qu'on a affaire à un nombre transcendant.

Décidément, les nombres algébriques sont très difficilement approchables !

Du côté des transcendants, on sait parfois les approcher mieux qu'avec une précision de $1/q^2$ et, dans le cas du nombre de Liouville L , on sait même qu'on peut les approcher avec une précision de $1/q^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Est-ce la même chose pour tous les nombres transcendants ? La réponse est non : pour cette capacité à approcher les transcendants, il existe une variété infinie de situations.

Pour traiter cette question, nous utiliserons l'exposant de q dans de la fraction $1/q^n$ comme moyen de classer les nombres transcendants. Cela conduit à la définition de la « mesure d'irrationalité » d'un nombre. C'est un peu compliqué, mais juste après la définition, nous verrons des exemples qui permettront facilement de la comprendre.

MESURE D'IRRATIONALITÉ D'UN NOMBRE RÉEL

Soit x un nombre réel. On considère l'ensemble des nombres y tels qu'il est impossible d'approcher x par une infinité de rationnels p/q avec une précision de $1/q^y$.

Si un y est dans cet ensemble, les y' supérieurs à y sont aussi dans cet ensemble. Cet ensemble est donc un intervalle de la forme $[z, +\infty)$ (tous les y tels que $y \geq z$) ou de la forme $]z, +\infty)$ (tous les y tels que $y > z$). Ce z situé à l'extrémité basse de l'intervalle infini est la « mesure d'irrationalité de x », que l'on notera $ir(x)$. Si on peut approcher x avec une précision de $1/q^y$ pour tout nombre y , on dira que $ir(x) = +\infty$.

Avec cette notion, le théorème de Roth s'exprime simplement : les nombres qui ont

LES FRACTIONS CONTINUES

5

À côté des développements en base de numération b comme les développements décimaux ($b = 10$) ou binaires ($b = 2$), il existe un type moins connu mais très important de développement d'un nombre réel : les développements en fraction continue. Un nombre x étant donné, on utilise la notation $x = [a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ pour l'expression :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

où les a_i sont des nombres entiers. Tout nombre réel positif s'écrit sous cette forme. Les nombres rationnels

sont les nombres réels dont le développement en fraction continue est fini (les a_i sont nuls à partir d'un certain rang n). Le nombre d'or, $(1+\sqrt{5})/2$, a le plus simple des développements infinis : $(1+\sqrt{5})/2 = [1 ; 1, 1, 1, \dots]$.

Lorsque le développement en fraction continue est assez simple, le nombre correspondant x se révèle transcendant. Voici deux très beaux résultats généraux récents là-dessus.

– Si la suite a_i est automatique (voir l'encadré 4) et n'est pas périodique à partir d'un certain n , alors x est transcendant (Bugeaud, 2013). Le nombre dont le développement en fraction continue est la suite de Prouhet-Thue-Morse $[0 ; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots]$ est donc transcendant.

– Si les débuts de la suite a_i sont une infinité de fois un palindrome, alors x est transcendant (Adamczewski et Bugeaud, 2007). Exemple : $x = [0 ; 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 4, 4, 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 5, 5, \dots]$.

La mesure d'irrationalité $ir(x)$ d'un nombre réel x (voir le texte principal) est liée à la suite a_i des entiers de son développement en fraction continue. C'est ce qu'indique un résultat classique : $ir(x)$ est la limite de la suite extraite de la suite $(2 + \ln(q_{n+1})/\ln(q_n))$ qui converge vers la plus grande valeur possible, où q_n est le dénominateur du nombre rationnel p_n/q_n obtenu en calculant la fraction continue finie $[a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

6

LE NOMBRE OMÉGA DE GREGORY CHAITIN

L'incomplétude se manifeste avec une force inouïe dans le nombre Ω de Gregory Chaitin. Par définition, Ω est la probabilité qu'un programme tiré au hasard s'arrête au bout d'un nombre fini de pas. La difficulté à le calculer provient de la fameuse indécidabilité de l'arrêt d'un programme découverte par Alan Turing en 1936.

Le nombre Ω est un objet mathématique comme $\log(2)$ ou π . Étant une probabilité, Ω est compris entre 0 et 1 et possède donc un développement binaire infini $\Omega = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Voici quelques propriétés de ce nombre.

- Le nombre Ω est non calculable : aucun algorithme ne peut en égrainer les chiffres un à un. Il est

donc transcendant, puisque tous les nombres algébriques sont calculables (à partir du polynôme dont le nombre algébrique x est racine, on sait comment calculer autant de chiffres qu'on veut de x).

- Le nombre obtenu en ne retenant que les chiffres de rang impair, ou de rang $f(0), f(1), f(2), \dots$ donné par toute fonction f calculable par algorithme et croissante ($f(0) < f(1) < f(2) < \dots$).
- La suite des chiffres de Ω est normale au sens de Borel : la fréquence avec laquelle on rencontre la séquence 00 (ou 01, ou 10, ou 11) est $1/4$, et plus



Dessin de la médaille conçue par Stephen Wolfram et Hector Zenil, offerte à Gregory Chaitin pour son 60^e anniversaire.

généralement la fréquence avec laquelle on rencontre une séquence déterminée de 0 et de 1 de longueur k est $1/2^k$.

- Le nombre Ω est aléatoire : il est impossible à compresser.

une mesure d'irrationalité strictement supérieure à 2 sont transcendants.

Ce qu'on a vu pour le nombre de Liouville signifie donc que le nombre transcendant de Liouville L a une mesure d'irrationalité $+\infty$.

Il n'est pas absurde de considérer que plus la mesure d'irrationalité d'un nombre est grande, plus ce nombre est «fortement transcendant». La mesure d'irrationalité est donc un moyen de classer les nombres par «gravité» de la transcendance!

SUR LA LIGNE DE FRONT DE LA RECHERCHE

Que sait-on aujourd'hui de cette gravité de la transcendance et quels sont les résultats connus concernant e , π , la constante de Prouhet-Thue-Morse, le nombre de Champernowne, etc.?

Voici quelques réponses obtenues plus ou moins récemment.

- Il existe une infinité de nombres transcendants ayant $+\infty$ comme mesure d'irrationalité.

- La base e des logarithmes naturels a pour mesure d'irrationalité 2, et c'est le cas de tous les nombres irrationnels sauf pour un ensemble de mesure nulle.

- Le nombre de Champernowne 0,123456789101112... a pour mesure d'irrationalité 10. Plus généralement, le nombre de Champernowne en base de numération b a pour mesure d'irrationalité b (Kurt Mahler, 1937). Tout entier supérieur ou égal à 2 est donc la mesure d'irrationalité d'un nombre x au moins. La variété des valeurs possibles pour la mesure d'irrationalité est bien plus grande encore, comme l'affirme le résultat récent suivant: pour tout nombre réel $r \geq 2$, il existe une infinité non dénombrable de

nombres transcendants dont la mesure d'irrationalité est r (Vojtěch Jarník, 1931).

- Les nombres automatiques irrationnels ont une mesure d'irrationalité qui est finie (Boris Adamczewski, Julien Cassaigne, 2006).

- Il existe des nombres normaux, c'est-à-dire contenant toutes les séquences finies s de chiffres avec une fréquence limite égale à $1/10^n$ où n est la longueur de s , ayant une mesure d'irrationalité $+\infty$ (Yann Bugeaud, 2002). Ce résultat répond à la question: est-ce que pour avoir une mesure d'irrationalité infinie, il est nécessaire de posséder de longues séquences de 0 comme L ? La réponse est donc non.

Voici quelques résultats connus concernant la mesure d'irrationalité:

π : 7,10320533 (Doron Zeilberger et Wadim Zudilin, 2020);

π^2 : 5,441243 (Georges Rhin et Carlo Viola, 1996);

$\ln(2)$: 3,57455391 (Raffaele Marcovecchio, 2009);

$\ln(3)$: 5,125 (Vladislav Salikhov, 2007);

$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + \dots$: 5,513891 (Georges Rhin et Carlo Viola, 2001);

Constante de Prouhet-Thue-Morse: 2 (Yann Bugeaud, 2011).

À chaque fois, le nombre indiqué n'est pas la mesure précise d'irrationalité, mais seulement un majorant. Il est vraisemblable que ces résultats pourront être améliorés. Le résultat sur π a été obtenu par une méthode intéressante: les chercheurs se sont inspirés d'une preuve proposée par Vladislav Salikhov qui donnait 7,6063... et, en utilisant un logiciel de calcul formel, ont exploité le plus finement possible ce qu'on pouvait en tirer, ce qui a amélioré le résultat.

Le travail à faire pour répondre aux plus élémentaires questions concernant la gravité de la transcendance des nombres ne fait que commencer! ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Adamczewski et al., **On the computational complexity of algebraic numbers**, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 373, pp. 3085-3115, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1601.02771.pdf>).

D. Zeilberger et W. Zudilin, **The irrationality measure of π is at most 7.103205334137...**, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1912.06345.pdf>).

J.-P. Delahaye, **Le fascinant nombre π** , Belin, 2018.

Y. Bugeaud, **Distribution Modulo One and Diophantine Approximation**, Cambridge University Press, 2012.

B. Adamczewski et T. Rivoal, **Irrationality measures for some automatic real numbers**, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 147, pp. 659-678, 2009 (<https://bit.ly/2VaQzSg>).

Y. Bugeaud, **Diophantine approximation and Cantor sets**, *Mathematische Annalen*, vol. 341(3), pp. 677-684, 2008.