

6

LE NOMBRE OMÉGA DE GREGORY CHAITIN

L'incomplétude se manifeste avec une force inouïe dans le nombre Ω de Gregory Chaitin. Par définition, Ω est la probabilité qu'un programme tiré au hasard s'arrête au bout d'un nombre fini de pas. La difficulté à le calculer provient de la fameuse indécidabilité de l'arrêt d'un programme découverte par Alan Turing en 1936.

Le nombre Ω est un objet mathématique comme $\log(2)$ ou π . Étant une probabilité, Ω est compris entre 0 et 1 et possède donc un développement binaire infini $\Omega = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Voici quelques propriétés de ce nombre.

- Le nombre Ω est non calculable : aucun algorithme ne peut en égrainer les chiffres un à un. Il est

donc transcendant, puisque tous les nombres algébriques sont calculables (à partir du polynôme dont le nombre algébrique x est racine, on sait comment calculer autant de chiffres qu'on veut de x).

- Le nombre obtenu en ne retenant que les chiffres de rang pair de Ω , à savoir $\Omega_{\text{pair}} = 0, a_0 a_2 a_4 \dots a_{2n} \dots$, est transcendant. C'est vrai aussi du nombre obtenu en ne retenant que les chiffres de rang impair, ou de rang $f(0), f(1), f(2), \dots$ donné par toute fonction f calculable par algorithme et croissante ($f(0) < f(1) < f(2) < \dots$).
- La suite des chiffres de Ω est normale au sens de Borel : la fréquence avec laquelle on rencontre la séquence 00 (ou 01, ou 10, ou 11) est $1/4$, et plus



Dessin de la médaille conçue par Stephen Wolfram et Hector Zenil, offerte à Gregory Chaitin pour son 60^e anniversaire.

généralement la fréquence avec laquelle on rencontre une séquence déterminée de 0 et de 1 de longueur k est $1/2^k$.

- Le nombre Ω est aléatoire : il est impossible à compresser.

une mesure d'irrationalité strictement supérieure à 2 sont transcendants.

Ce qu'on a vu pour le nombre de Liouville signifie donc que le nombre transcendant de Liouville L a une mesure d'irrationalité $+\infty$.

Il n'est pas absurde de considérer que plus la mesure d'irrationalité d'un nombre est grande, plus ce nombre est «fortement transcendant». La mesure d'irrationalité est donc un moyen de classer les nombres par «gravité» de la transcendance!

SUR LA LIGNE DE FRONT DE LA RECHERCHE

Que sait-on aujourd'hui de cette gravité de la transcendance et quels sont les résultats connus concernant e , π , la constante de Prouhet-Thue-Morse, le nombre de Champernowne, etc.?

Voici quelques réponses obtenues plus ou moins récemment.

- Il existe une infinité de nombres transcendants ayant $+\infty$ comme mesure d'irrationalité.

- La base e des logarithmes naturels a pour mesure d'irrationalité 2, et c'est le cas de tous les nombres irrationnels sauf pour un ensemble de mesure nulle.

- Le nombre de Champernowne $0,123456789101112\dots$ a pour mesure d'irrationalité 10. Plus généralement, le nombre de Champernowne en base de numération b a pour mesure d'irrationalité b (Kurt Mahler, 1937). Tout entier supérieur ou égal à 2 est donc la mesure d'irrationalité d'un nombre x au moins. La variété des valeurs possibles pour la mesure d'irrationalité est bien plus grande encore, comme l'affirme le résultat récent suivant: pour tout nombre réel $r \geq 2$, il existe une infinité non dénombrable de

nombres transcendants dont la mesure d'irrationalité est r (Vojtěch Jarník, 1931).

- Les nombres automatiques irrationnels ont une mesure d'irrationalité qui est finie (Boris Adamczewski, Julien Cassaigne, 2006).

- Il existe des nombres normaux, c'est-à-dire contenant toutes les séquences finies s de chiffres avec une fréquence limite égale à $1/10^n$ où n est la longueur de s , ayant une mesure d'irrationalité $+\infty$ (Yann Bugeaud, 2002). Ce résultat répond à la question: est-ce que pour avoir une mesure d'irrationalité infinie, il est nécessaire de posséder de longues séquences de 0 comme L ? La réponse est donc non.

Voici quelques résultats connus concernant la mesure d'irrationalité:

π : 7,10320533 (Doron Zeilberger et Wadim Zudilin, 2020);

π^2 : 5,441243 (Georges Rhin et Carlo Viola, 1996);

$\ln(2)$: 3,57455391 (Raffaele Marcovecchio, 2009);

$\ln(3)$: 5,125 (Vladislav Salikhov, 2007);

$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + \dots$: 5,513891 (Georges Rhin et Carlo Viola, 2001);

Constante de Prouhet-Thue-Morse: 2 (Yann Bugeaud, 2011).

À chaque fois, le nombre indiqué n'est pas la mesure précise d'irrationalité, mais seulement un majorant. Il est vraisemblable que ces résultats pourront être améliorés. Le résultat sur π a été obtenu par une méthode intéressante: les chercheurs se sont inspirés d'une preuve proposée par Vladislav Salikhov qui donnait 7,6063... et, en utilisant un logiciel de calcul formel, ont exploité le plus finement possible ce qu'on pouvait en tirer, ce qui a amélioré le résultat.

Le travail à faire pour répondre aux plus élémentaires questions concernant la gravité de la transcendance des nombres ne fait que commencer! ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Adamczewski et al., **On the computational complexity of algebraic numbers**, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 373, pp. 3085-3115, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1601.02771.pdf>).

D. Zeilberger et W. Zudilin, **The irrationality measure of π is at most 7.103205334137...**, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1912.06345.pdf>).

J.-P. Delahaye, **Le fascinant nombre π** , Belin, 2018.

Y. Bugeaud, **Distribution Modulo One and Diophantine Approximation**, Cambridge University Press, 2012.

B. Adamczewski et T. Rivoal, **Irrationality measures for some automatic real numbers**, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 147, pp. 659-678, 2009 (<https://bit.ly/2VaQzSg>).

Y. Bugeaud, **Diophantine approximation and Cantor sets**, *Mathematische Annalen*, vol. 341(3), pp. 677-684, 2008.