

6

LE NOMBRE OMÉGA DE GREGORY CHAITIN

L'incomplétude se manifeste avec une force inouïe dans le nombre Ω de Gregory Chaitin. Par définition, Ω est la probabilité qu'un programme tiré au hasard s'arrête au bout d'un nombre fini de pas. La difficulté à le calculer provient de la fameuse indécidabilité de l'arrêt d'un programme découverte par Alan Turing en 1936.

Le nombre Ω est un objet mathématique comme $\log(2)$ ou π . Étant une probabilité, Ω est compris entre 0 et 1 et possède donc un développement binaire infini $\Omega = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Voici quelques propriétés de ce nombre.

- Le nombre Ω est non calculable : aucun algorithme ne peut en égrainer les chiffres un à un. Il est

donc transcendant, puisque tous les nombres algébriques sont calculables (à partir du polynôme dont le nombre algébrique x est racine, on sait comment calculer autant de chiffres qu'on veut de x).

- Le nombre obtenu en ne retenant que les chiffres de rang pair de Ω , à savoir $\Omega_{\text{pair}} = 0, a_0 a_2 a_4 \dots a_{2n} \dots$, est transcendant. C'est vrai aussi du nombre obtenu en ne retenant que les chiffres de rang impair, ou de rang $f(0), f(1), f(2), \dots$ donné par toute fonction f calculable par algorithme et croissante ($f(0) < f(1) < f(2) < \dots$).
- La suite des chiffres de Ω est normale au sens de Borel : la fréquence avec laquelle on rencontre la séquence 00 (ou 01, ou 10, ou 11) est $1/4$, et plus



Dessin de la médaille conçue par Stephen Wolfram et Hector Zenil, offerte à Gregory Chaitin pour son 60^e anniversaire.

généralement la fréquence avec laquelle on rencontre une séquence déterminée de 0 et de 1 de longueur k est $1/2^k$.

- Le nombre Ω est aléatoire : il est impossible à compresser.

une mesure d'irrationalité strictement supérieure à 2 sont transcendants.

Ce qu'on a vu pour le nombre de Liouville signifie donc que le nombre transcendant de Liouville L a une mesure d'irrationalité $+\infty$.

Il n'est pas absurde de considérer que plus la mesure d'irrationalité d'un nombre est grande, plus ce nombre est «fortement transcendant». La mesure d'irrationalité est donc un moyen de classer les nombres par «gravité» de la transcendance!

SUR LA LIGNE DE FRONT DE LA RECHERCHE

Que sait-on aujourd'hui de cette gravité de la transcendance et quels sont les résultats connus concernant e , π , la constante de Prouhet-Thue-Morse, le nombre de Champernowne, etc.?

Voici quelques réponses obtenues plus ou moins récemment.

- Il existe une infinité de nombres transcendants ayant $+\infty$ comme mesure d'irrationalité.

- La base e des logarithmes naturels a pour mesure d'irrationalité 2, et c'est le cas de tous les nombres irrationnels sauf pour un ensemble de mesure nulle.

- Le nombre de Champernowne $0,123456789101112\dots$ a pour mesure d'irrationalité 10. Plus généralement, le nombre de Champernowne en base de numération b a pour mesure d'irrationalité b (Kurt Mahler, 1937). Tout entier supérieur ou égal à 2 est donc la mesure d'irrationalité d'un nombre x au moins. La variété des valeurs possibles pour la mesure d'irrationalité est bien plus grande encore, comme l'affirme le résultat récent suivant: pour tout nombre réel $r \geq 2$, il existe une infinité non dénombrable de

nombres transcendants dont la mesure d'irrationalité est r (Vojtěch Jarník, 1931).

- Les nombres automatiques irrationnels ont une mesure d'irrationalité qui est finie (Boris Adamczewski, Julien Cassaigne, 2006).

- Il existe des nombres normaux, c'est-à-dire contenant toutes les séquences finies s de chiffres avec une fréquence limite égale à $1/10^n$ où n est la longueur de s , ayant une mesure d'irrationalité $+\infty$ (Yann Bugeaud, 2002). Ce résultat répond à la question: est-ce que pour avoir une mesure d'irrationalité infinie, il est nécessaire de posséder de longues séquences de 0 comme L ? La réponse est donc non.

Voici quelques résultats connus concernant la mesure d'irrationalité:

π : 7,10320533 (Doron Zeilberger et Wadim Zudilin, 2020);

π^2 : 5,441243 (Georges Rhin et Carlo Viola, 1996);

$\ln(2)$: 3,57455391 (Raffaele Marcovecchio, 2009);

$\ln(3)$: 5,125 (Vladislav Salikhov, 2007);

$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + \dots$: 5,513891 (Georges Rhin et Carlo Viola, 2001);

Constante de Prouhet-Thue-Morse: 2 (Yann Bugeaud, 2011).

À chaque fois, le nombre indiqué n'est pas la mesure précise d'irrationalité, mais seulement un majorant. Il est vraisemblable que ces résultats pourront être améliorés. Le résultat sur π a été obtenu par une méthode intéressante: les chercheurs se sont inspirés d'une preuve proposée par Vladislav Salikhov qui donnait 7,6063... et, en utilisant un logiciel de calcul formel, ont exploité le plus finement possible ce qu'on pouvait en tirer, ce qui a amélioré le résultat.

Le travail à faire pour répondre aux plus élémentaires questions concernant la gravité de la transcendance des nombres ne fait que commencer! ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Adamczewski et al., **On the computational complexity of algebraic numbers**, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 373, pp. 3085-3115, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1601.02771.pdf>).

D. Zeilberger et W. Zudilin, **The irrationality measure of π is at most 7.103205334137...**, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1912.06345.pdf>).

J.-P. Delahaye, **Le fascinant nombre π** , Belin, 2018.

Y. Bugeaud, **Distribution Modulo One and Diophantine Approximation**, Cambridge University Press, 2012.

B. Adamczewski et T. Rivoal, **Irrationality measures for some automatic real numbers**, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 147, pp. 659-678, 2009 (<https://bit.ly/2VaQzSg>).

Y. Bugeaud, **Diophantine approximation and Cantor sets**, *Mathematische Annalen*, vol. 341(3), pp. 677-684, 2008.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

COMMENT VOLENT LES INSECTES

Les petites bêtes pratiquent le vol battu, mais pas comme les oiseaux. Et le type de mouvement décrit par leurs ailes dépend de la taille de l'insecte.

Le printemps s'achève et les jardins sont animés par les ballets aériens des insectes butineurs, mais aussi parfois par les manœuvres surnoises d'importuns moustiques. Observer le vol des insectes suscite toujours de l'étonnement : décollage en vol arrière, atterrissage au dos d'une feuille, vol stationnaire ou voltiges en tous genres...

Ces performances aériennes inégales sont longtemps restées inexplicables, en raison de la petite taille des insectes (et de leur refus de coopérer !). Il a fallu le développement des techniques d'imagerie et de calcul pour que l'on comprenne peu à peu comment ils volent. Surprise : de multiples mécanismes contribuent à leur sustentation et, pour un même type d'insectes, les mouvements de leurs ailes varient selon la taille de l'espèce.

Pour voler, les insectes ont besoin d'une force qui compense leur poids et d'une poussée pour avancer. Comme ils

ne disposent ni d'hélices ni de réacteurs, ils créent ces forces en battant leurs ailes d'avant en arrière : ils s'apparentent davantage à un hélicoptère, dont les pales (les ailes) sont mobiles, qu'à un avion.

CALCULER COMME POUR UNE AILE D'AVION ?

On peut tenter de calculer la force aérodynamique agissant sur une aile d'insecte comme on le ferait pour une aile d'avion légèrement inclinée par rapport à l'horizontale. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse (ici de l'aile en mouvement dans l'air immobile) et se décompose en une force opposée à la vitesse, la traînée, et une autre perpendiculaire, la portance.

Pour que la portance compense le poids, il faut que l'angle entre le plan de l'aile et la direction du déplacement soit toujours dans le même sens, ce qui suppose que l'aile modifie son inclinaison lorsque son déplacement change de sens (de l'avant vers l'arrière, ou inversement) :

Les mouvements d'ailes que font pour voler les insectes relativement grands, comme les mouches butineuses, diffèrent de ceux des insectes moins visibles, tels que les petits moustiques.

ces rotations rapides de l'aile, que l'on constate effectivement chez les insectes, ont pour noms « supination » et « pronation » (voir l'encadré page ci-contre).

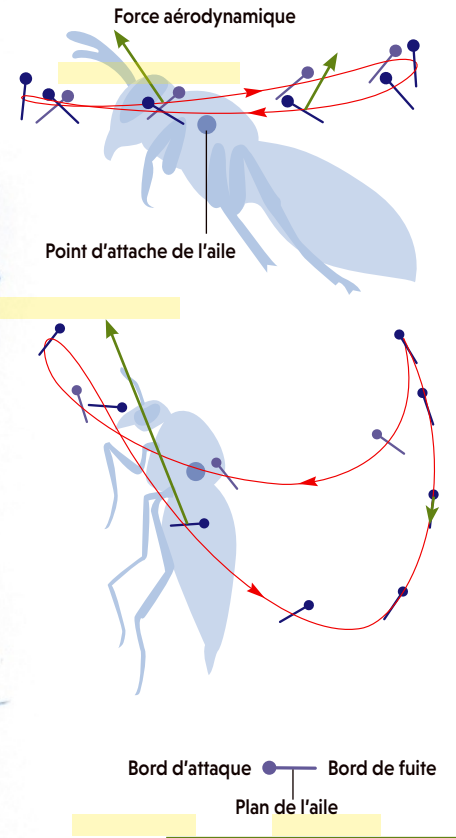
Par ailleurs, comme le poids croît comme le volume de l'insecte, et la portance comme la superficie des ailes, on peut estimer que la vitesse de translation des ailes augmente comme la racine carrée de la taille caractéristique de l'insecte, donc que la fréquence de battement, qui reflète le rapport vitesse/taille, varie comme l'inverse de cette racine carrée.

Ce résultat va dans le bon sens : à l'oreille, on distingue nettement les petits insectes, comme les moustiques ou



VA-ET-VIENT DANS UN PLAN... OU NON

Dans la plupart des cas, chez les insectes, les ailes effectuent un mouvement d'avant en arrière, avec une inclinaison qui bascule assez brutalement lorsque ce mouvement change de sens (« supination » quand l'aile tourne à l'avant, « pronation » quand elle tourne à l'arrière). Le mouvement alaire s'effectue à peu près dans un plan pour les gros insectes de la taille d'une abeille. Pour des insectes nettement plus petits (*schéma du bas*), les forces de sustentation dues aux tourbillons d'air créés par les ailes dans cette configuration sont insuffisantes. Durant la phase de retour, ces insectes projettent les ailes vers le bas, ce qui donne lieu à une traînée presque verticale et contribue ainsi à la sustentation.



moucheron, des plus gros, comme les abeilles domestiques, car les premiers battent des ailes à une plus haute fréquence, donc émettent des sons plus aigus, jusqu'à 1 kilohertz.

Enfin, on comprend que si l'insecte fait varier l'inclinaison de son aile entre l'aller et le retour, il peut modifier les valeurs de la traînée sur l'aller et le retour, si bien qu'au lieu de se compenser et autoriser le vol stationnaire, la moyenne sur l'ensemble du cycle fournit une poussée vers l'avant (ou vers l'arrière). Et en brisant la symétrie des mouvements alaires de part et d'autre du corps, il peut tourner à gauche ou à droite.

En fait, l'approche « aéronautique » adoptée plus haut ne convient pas vraiment au cas des insectes. En effet, lors des battements, tant la vitesse de l'aile que son inclinaison varient en permanence. La force aérodynamique n'est donc pas constante durant chaque phase. Or si l'on calcule la force instantanée comme celle engendrée par une aile d'avion de même vitesse et inclinaison, et que l'on fait la moyenne en considérant le mouvement réel de l'aile de l'insecte, on trouve que la force de sustentation est trois fois inférieure au poids !

D'où provient un tel écart ? Comme pour tout écoulement d'un fluide, il est

utile de comparer le rapport entre les forces d'inertie, liées au déplacement du fluide, et les forces de viscosité, liées aux frottements des couches de fluide entre elles. Ce rapport est mesuré par le « nombre de Reynolds ». Pour les insectes, il varie entre 10, pour les plus petits, et 1 000, pour les plus gros. C'est très loin des nombres de Reynolds caractéristiques d'un avion de ligne (de l'ordre de 10^8) ou d'un nageur dans de l'eau (de l'ordre >

Les auteurs ont notamment publié : **En avant la physique !**, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).



> de 10^9). En gros, le cas des insectes correspond à celui d'un nageur évoluant dans une huile extrêmement visqueuse...

Dans ce registre de valeurs, l'écoulement de l'air autour des ailes n'est pas turbulent, mais la relation entre la force aérodynamique et la vitesse n'est pas simple. Plus fondamentalement encore, les mouvements de l'aile sont si rapides qu'on est très loin de la situation d'un écoulement stationnaire où un objet se déplace à vitesse constante relativement au fluide. Il a fallu des années pour que les physiciens fassent l'inventaire des effets faisant varier la force aérodynamique pendant le cycle du battement de l'aile, notamment en travaillant sur des maquettes mises à l'échelle adéquate, avec le même nombre de Reynolds.

TOURBILLONS ET ASPIRATIONS

Pour faire simple, la plupart des effets proviennent de l'apparition de tourbillons transitoires dans les différentes phases. Cela se produit par exemple quand l'aile se retourne entre chaque demi-battement: la rotation entraîne le fluide visqueux environnant.

Plus étonnant, les insectes mettent à profit un phénomène bien connu des ingénieurs aéronautiques: le décrochage retardé. On constate en effet que l'inclinaison de leurs ailes (entre 20° et 40°) est notablement plus élevée que celle d'une aile d'avion; elle va même au-delà de l'angle de décrochage. Or quand on dépasse cet angle, un tourbillon se crée au-dessus et à l'arrière du bord d'attaque de l'aile. D'habitude, il est rapidement évacué derrière l'aile, mais ici il n'en a pas le temps.

Enfin, les chercheurs se sont rendu compte que l'aile interagit avec le tourbillon du sillage créé par le précédent battement. À chaque fois, comme dans une tornade, l'écoulement de l'air dans ces tourbillons est très rapide et la pression y est très faible. Cela provoque des effets de succion-aspiration sur l'aile, qui augmentent en moyenne la force de sustentation.

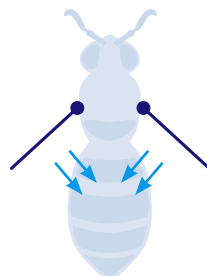
Dernière complication, pour les plus petits insectes, les effets des forces de viscosité augmentent. Or viscosité et tourbillons ne font pas bon ménage. Un tourbillon dans de l'huile se dissipe beaucoup plus rapidement que dans de l'eau. Conséquence: les tourbillons dont nous venons de parler produisent des forces moins intenses pour les petits insectes que pour les gros, et ne permettraient donc plus de compenser leur poids.

C'est pourquoi les petits insectes ont une autre façon de voler. Au lieu de

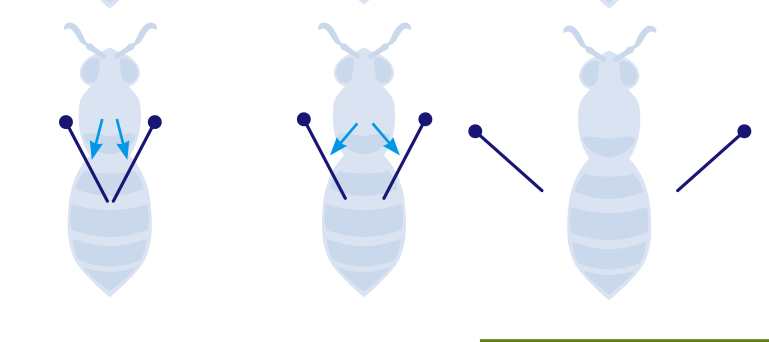
LE CLAP & FLING

Les très petits insectes claquent leurs ailes l'une contre l'autre dans une séquence où ils les ouvrent et ferment, le corps étant orienté verticalement. La propulsion de l'air vers le bas ou son aspiration depuis le haut (flèches bleues) ainsi produites contribuent à la sustentation.

«Clap»



«Fling»



conserver un mouvement alaire dans le plan horizontal, pendant la phase de retour, lorsque les ailes repartent vers l'arrière, ils les projettent fortement vers le bas, comme s'ils prenaient appui sur l'air. Durant cette phase, la traînée est alors presque verticale et contribue donc, contrairement au cas des gros insectes, à la sustentation.

CLAUQUEMENTS D'AILES

À la limite, pour les insectes les plus petits, on obtient une nouvelle modalité de vol: le «clap & fling» (voir l'encadré ci-dessus). Dans ce cas, l'insecte claque les bords d'attaque de ses ailes l'un contre l'autre à la verticale à la fin de la phase de retour: c'est le «clap». Cela chasse brutalement de l'air vers le bas et engendre donc une poussée vers le haut. Aussitôt, l'insecte rouvre les ailes et les projette vers le bas en les pivotant autour de leurs bords de fuite: c'est le «fling». Cette ouverture aspire l'air vers le bas, créant une dépression au-dessus de l'aile qui accroît la force ascensionnelle.

Évidemment, claquer ses ailes comme dans un garde-à-vous à haute fréquence peut les endommager. C'est pourquoi certains insectes ne se livrent qu'à une séquence incomplète de telles manœuvres. ■

BIBLIOGRAPHIE

Y. Z. Lyu et al., **Flapping-mode changes and aerodynamic mechanisms in miniature insects**, *Physical Review E*, vol. 99, 012419, 2019.

S. P. Sane, **The aerodynamics of insect flight**, *The Journal of Experimental Biology*, vol. 206, pp. 4191-4208, 2003.

M. Dickinson, **Le vol des insectes**, *Pour la Science*, n° 286, août 2001.