

R

ENDEZ-VOUS

P.82 Logique & calcul
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LE SECRET D'ARSÈNE LUPIN : LES SUPER-PERMUTATIONS

Comment représenter toutes les permutations possibles d'un ensemble par une courte séquence ? Ce jeu de tassement n'intéresse pas seulement les mathématiciens : il peut aussi aider les étourdis, les cambrioleurs et les voyageurs de commerce.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Certains problèmes simples passionnent les amateurs de mathématiques et les conduisent aux sommets de la recherche. Le problème dont nous allons parler dans cette rubrique est de cette catégorie. Plus étrange et plus rare, une avancée dans les recherches menées sur les superpermutations provient d'un contributeur qui a souhaité rester anonyme ! De surcroît, les mathématiques des superpermutations peuvent intéresser les cambrioleurs et les étourdis qui ont oublié leur code.

Les permutations d'un ensemble sont les différentes façons d'en classer les éléments. Il y a par exemple 6 permutations possibles d'un ensemble de trois éléments $\{1, 2, 3\}$ qui sont : 123, 132, 213, 231, 312 et 321.

Dans le cas d'un ensemble ayant n éléments, il y a $n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutations possibles. Le nombre $n!$ (« factorielle n ») croît très rapidement avec n :

$1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$; $8! = 40320$; $9! = 362880$; $10! = 3628800$; $11! = 39916800$; $12! = 479001600$; $13! = 6227020800$; $14! = 87178291200$; etc.

Le problème des superpermutations pour n consiste à proposer une suite d'entiers compris entre 1 et n , aussi courte que possible, dans laquelle on trouve chaque permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ comme séquence d'éléments côte à côte.

Pour $n=2$, la suite 121 de longueur 3 est une superpermutation, car on y trouve 12 et 21 qui sont les deux seules permutations

de $\{1, 2\}$. En échangeant le rôle de 1 et de 2, on obtient une seconde superpermutation de longueur 3 : 212. Cette possibilité d'obtenir d'autres superpermutations de même longueur dès qu'on en a une fonctionne bien sûr pour tout n , et chaque superpermutation trouvée pour n en donnera $n!$ de même longueur, puisqu'il y a $n!$ façons de permuter les symboles de $\{1, 2, \dots, n\}$.

PREMIÈRES SUPERPERMUTATIONS

Pour $n=3$, la séquence 123121321 est une superpermutation ; on y trouve bien les 6 permutations 123, 132, 213, 231, 312, 321, dans l'ordre 123, 231, 312, 213, 132, 321.

Pour la construire, on a pris les 6 permutations et on les a mises les unes derrière les autres en choisissant un ordre permettant de les fusionner au mieux. Derrière 123, on a choisi de mettre 231, ce qui, en les fusionnant, donne 1231 et fait donc gagner 2 symboles par rapport à une juxtaposition sans fusion.

La superpermutation proposée pour $n=3$ a pour longueur 9. Est-il possible d'avoir plus court ? La réponse est non. Pour s'en persuader, il faut faire un petit raisonnement (voir l'encadré 1).

Pour des n supérieurs à 3, on peut procéder par tâtonnement ou en utilisant des programmes qui explorent tous les cas possibles. On va voir qu'on rencontre vite les limites de capacité de calcul de nos ordinateurs, car la croissance exponentielle de $n!$ est vraiment très rapide. Il existe cependant des raisonnements généraux donnant des informations sur

les superpermutations recherchées qui simplifient le traitement des cas particuliers.

Voici quelques-uns de ces résultats sur la longueur des superpermutations. Ils ont été trouvés à la fois par des chercheurs mathématiciens et par des amateurs passionnés par le problème – en particulier Greg Egan, auteur australien de science-fiction, à qui l'on doit le roman *Permutation City* et qui maintient à jour un excellent site internet sur le sujet (voir l'encadré 5).

TROUVER, POUR n DONNÉ, CELLE QUI EST LA PLUS COURTE

La plus courte superpermutation pour n comporte au moins $n! + n - 1$ symboles. En effet, chaque symbole d'une superpermutation ne peut être le début que d'une permutation au plus: il faut donc au moins $n!$ symboles dans une superpermutation. Cependant les $n - 1$ derniers symboles ne peuvent pas être le début d'une permutation, car il n'y a pas assez de symboles qui suivent: une superpermutation pour n comporte donc au moins $n! + n - 1$ symboles.

Un raisonnement plus fin proposé en 1993 par les mathématiciens Daniel Ashlock et Jenett Tillotson montre que la longueur minimale est au mieux $n! + (n - 1)! + (n - 2)!$. Un autre raisonnement, plus récent et plus efficace, donne le minorant: $n! + (n - 1)! + (n - 2)! + (n - 3)!$.

Ce résultat est le meilleur connu aujourd'hui pour la minoration de la longueur d'une superpermutation. Il a une histoire un peu étrange.

En 2011, sur le forum internet 4chan, des internautes échangeaient sur le problème de savoir comment il faut s'y prendre pour diffuser aussi rapidement que possible les épisodes d'une série télévisée qui en comporte n , de manière à ce qu'on puisse les voir dans tous les ordres possibles selon le moment où on commence à regarder la diffusion de la série. Le problème est exactement celui de trouver la plus courte superpermutation de n éléments.

Un internaute anonyme affirma qu'il était impossible de réussir en moins de $n! + (n - 1)! + (n - 2)! + (n - 3)!$ diffusions d'épisodes. Il donnait des arguments imparfaits, mais relativement précis tout de même.

Quelques années plus tard, en 2018, un groupe de mathématiciens composé de Robin Houston, Jay Pantone et Vince Vatter, préoccupés par le problème des superpermutations, a repris les idées du contributeur anonyme, les a rédigées de manière précise et complète, et les a publiées. Très honnête, le groupe de mathématiciens publia le résultat (<https://oeis.org/A180632/a180632.pdf>) sous leurs trois noms précédés d'un nom fictif, *Anonymous 4chan Poster*, pour l'amateur génial et toujours inconnu.

1

SUPERPERMUTATIONS ET OUVERTURE DE COFFRE-FORT



Une superpermutation d'ordre $n = 3$ est une suite de nombres pris parmi 1, 2 et 3 où l'on trouve toutes les permutations des trois nombres 1, 2, 3, c'est-à-dire 123, 132, 213, 231, 312, 321. Bien sûr, en mettant les permutations les unes derrière les autres, on a ce qu'on cherche avec une suite de longueur 18 : 123132213231312321. On peut cependant faire mieux : la suite 123121321 convient. La longueur 9 est donc possible pour $n = 3$.

Démontrons qu'on ne peut pas faire mieux que 9. Supposons qu'une suite $n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7 n_8$ de 8 nombres convienne pour $n = 3$, c'est-à-dire que les 6 suites $n_1 n_2 n_3$, $n_2 n_3 n_4$, $n_3 n_4 n_5$, $n_4 n_5 n_6$, $n_5 n_6 n_7$, $n_6 n_7 n_8$ sont les 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$, ce qui signifie, en particulier, qu'elles sont toutes différentes.

Pour que $n_1 n_2 n_3$ soit une permutation, il faut que n_1 soit différent de n_2 et différent de n_3 . Pour que $n_2 n_3 n_4$ soit une permutation, il faut que n_4 soit différent de n_2 et de n_3 . Donc nécessairement $n_1 = n_4$.

De même, en considérant $n_2 n_3 n_4$ et $n_3 n_4 n_5$, on conclut que $n_2 = n_5$; et en considérant $n_3 n_4 n_5$ et $n_4 n_5 n_6$, on déduit que $n_3 = n_6$. Par conséquent, on aurait $n_1 n_2 n_3 = n_4 n_5 n_6$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que les 6 suites $n_1 n_2 n_3$, $n_2 n_3 n_4$, $n_3 n_4 n_5$, $n_4 n_5 n_6$, $n_5 n_6 n_7$, et $n_6 n_7 n_8$ sont toutes différentes. Conclusion : il n'existe pas de superpermutation de longueur 8 pour $n = 3$.

Pour $n = 4$, on trouve 1234123142 31243121342132413214321, de longueur 33, dont on montre aussi (c'est un peu plus compliqué, bien sûr !) qu'elle est la plus courte

superpermutation possible pour $n = 4$.

Une application possible des superpermutations est l'ouverture d'un coffre-fort fermé dont on a perdu la combinaison. Pour l'ouvrir, il faut positionner le curseur du coffre en lui faisant occuper 4 positions différentes successives qui constituent le code d'ouverture, par exemple 6 puis 2 puis 1 puis 4. On a oublié les 4 chiffres du code d'ouverture. On pourrait essayer les unes après les autres toutes les combinaisons en bougeant le curseur 4 fois pour chacune. On a $10 \times 9 \times 8 \times 7 / (4 \times 3 \times 2) = 210$ sous-ensembles de 4 chiffres, et pour chacun de ces sous-ensembles, il y a $4! = 24$ ordres possibles. Au total, on a donc $210 \times 24 \times 4 = 20\,160$ mouvements du curseur à faire par la méthode d'énumération naturelle.

En utilisant la superpermutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ de longueur 33, on peut cependant économiser beaucoup de mouvements. Pour chaque ensemble de 4 chiffres $\{a, b, c, d\}$, on copie la superpermutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ en remplaçant 1 par a , 2 par b , 3 par c , 4 par d , et on utilise la superpermutation de $\{a, b, c, d\}$ pour essayer toutes les combinaisons. On fera ainsi 33 mouvements au lieu de $4 \times 24 = 96$. Au total, on ne fera (au maximum) que $33 \times 210 = 6\,930$ mouvements du curseur au lieu de 20 160, ce qui correspond à un gain de plus de 65 %. En faisant attention à l'ordre dans lequel on considère les sous-ensembles de 4 chiffres, on peut d'ailleurs gagner encore quelques mouvements.