

les superpermutations recherchées qui simplifient le traitement des cas particuliers.

Voici quelques-uns de ces résultats sur la longueur des superpermutations. Ils ont été trouvés à la fois par des chercheurs mathématiciens et par des amateurs passionnés par le problème – en particulier Greg Egan, auteur australien de science-fiction, à qui l'on doit le roman *Permutation City* et qui maintient à jour un excellent site internet sur le sujet (voir l'encadré 5).

TROUVER, POUR n DONNÉ, CELLE QUI EST LA PLUS COURTE

La plus courte superpermutation pour n comporte au moins $n! + n - 1$ symboles. En effet, chaque symbole d'une superpermutation ne peut être le début que d'une permutation au plus: il faut donc au moins $n!$ symboles dans une superpermutation. Cependant les $n - 1$ derniers symboles ne peuvent pas être le début d'une permutation, car il n'y a pas assez de symboles qui suivent: une superpermutation pour n comporte donc au moins $n! + n - 1$ symboles.

Un raisonnement plus fin proposé en 1993 par les mathématiciens Daniel Ashlock et Jenett Tillotson montre que la longueur minimale est au mieux $n! + (n - 1)! + (n - 2)!$. Un autre raisonnement, plus récent et plus efficace, donne le minorant: $n! + (n - 1)! + (n - 2)! + (n - 3)!$.

Ce résultat est le meilleur connu aujourd'hui pour la minoration de la longueur d'une superpermutation. Il a une histoire un peu étrange.

En 2011, sur le forum internet 4chan, des internautes échangeaient sur le problème de savoir comment il faut s'y prendre pour diffuser aussi rapidement que possible les épisodes d'une série télévisée qui en comporte n , de manière à ce qu'on puisse les voir dans tous les ordres possibles selon le moment où on commence à regarder la diffusion de la série. Le problème est exactement celui de trouver la plus courte superpermutation de n éléments.

Un internaute anonyme affirma qu'il était impossible de réussir en moins de $n! + (n - 1)! + (n - 2)! + (n - 3)!$ diffusions d'épisodes. Il donnait des arguments imparfaits, mais relativement précis tout de même.

Quelques années plus tard, en 2018, un groupe de mathématiciens composé de Robin Houston, Jay Pantone et Vince Vatter, préoccupés par le problème des superpermutations, a repris les idées du contributeur anonyme, les a rédigées de manière précise et complète, et les a publiées. Très honnête, le groupe de mathématiciens publia le résultat (<https://oeis.org/A180632/a180632.pdf>) sous leurs trois noms précédés d'un nom fictif, *Anonymous 4chan Poster*, pour l'amateur génial et toujours inconnu.

1

SUPERPERMUTATIONS ET OUVERTURE DE COFFRE-FORT



Une superpermutation d'ordre $n = 3$ est une suite de nombres pris parmi 1, 2 et 3 où l'on trouve toutes les permutations des trois nombres 1, 2, 3, c'est-à-dire 123, 132, 213, 231, 312, 321. Bien sûr, en mettant les permutations les unes derrière les autres, on a ce qu'on cherche avec une suite de longueur 18 : 123132213231312321. On peut cependant faire mieux : la suite 123121321 convient. La longueur 9 est donc possible pour $n = 3$.

Démontrons qu'on ne peut pas faire mieux que 9. Supposons qu'une suite $n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7 n_8$ de 8 nombres convienne pour $n = 3$, c'est-à-dire que les 6 suites $n_1 n_2 n_3$, $n_2 n_3 n_4$, $n_3 n_4 n_5$, $n_4 n_5 n_6$, $n_5 n_6 n_7$, $n_6 n_7 n_8$ sont les 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$, ce qui signifie, en particulier, qu'elles sont toutes différentes.

Pour que $n_1 n_2 n_3$ soit une permutation, il faut que n_1 soit différent de n_2 et différent de n_3 . Pour que $n_2 n_3 n_4$ soit une permutation, il faut que n_4 soit différent de n_2 et de n_3 . Donc nécessairement $n_1 = n_4$.

De même, en considérant $n_2 n_3 n_4$ et $n_3 n_4 n_5$, on conclut que $n_2 = n_5$; et en considérant $n_3 n_4 n_5$ et $n_4 n_5 n_6$, on déduit que $n_3 = n_6$. Par conséquent, on aurait $n_1 n_2 n_3 = n_4 n_5 n_6$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que les 6 suites $n_1 n_2 n_3$, $n_2 n_3 n_4$, $n_3 n_4 n_5$, $n_4 n_5 n_6$, $n_5 n_6 n_7$, et $n_6 n_7 n_8$ sont toutes différentes. Conclusion : il n'existe pas de superpermutation de longueur 8 pour $n = 3$.

Pour $n = 4$, on trouve 1234123142 31243121342132413214321, de longueur 33, dont on montre aussi (c'est un peu plus compliqué, bien sûr !) qu'elle est la plus courte

superpermutation possible pour $n = 4$.

Une application possible des superpermutations est l'ouverture d'un coffre-fort fermé dont on a perdu la combinaison. Pour l'ouvrir, il faut positionner le curseur du coffre en lui faisant occuper 4 positions différentes successives qui constituent le code d'ouverture, par exemple 6 puis 2 puis 1 puis 4. On a oublié les 4 chiffres du code d'ouverture. On pourrait essayer les unes après les autres toutes les combinaisons en bougeant le curseur 4 fois pour chacune. On a $10 \times 9 \times 8 \times 7 / (4 \times 3 \times 2) = 210$ sous-ensembles de 4 chiffres, et pour chacun de ces sous-ensembles, il y a $4! = 24$ ordres possibles. Au total, on a donc $210 \times 24 \times 4 = 20\,160$ mouvements du curseur à faire par la méthode d'énumération naturelle.

En utilisant la superpermutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ de longueur 33, on peut cependant économiser beaucoup de mouvements. Pour chaque ensemble de 4 chiffres $\{a, b, c, d\}$, on copie la superpermutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ en remplaçant 1 par a , 2 par b , 3 par c , 4 par d , et on utilise la superpermutation de $\{a, b, c, d\}$ pour essayer toutes les combinaisons. On fera ainsi 33 mouvements au lieu de $4 \times 24 = 96$. Au total, on ne fera (au maximum) que $33 \times 210 = 6\,930$ mouvements du curseur au lieu de 20 160, ce qui correspond à un gain de plus de 65 %. En faisant attention à l'ordre dans lequel on considère les sous-ensembles de 4 chiffres, on peut d'ailleurs gagner encore quelques mouvements.

> Connaître un minorant ne garantit pas qu'on trouvera une superpermutation de la longueur indiquée; c'est seulement l'affirmation qu'il est impossible de faire plus court. Après avoir cherché les minorants de la taille de la meilleure superpermutation, il est naturel de s'intéresser aux majorants en essayant cette fois de trouver les plus petits possible. Si l'on réussit à faire se rejoindre les minorants et les majorants, le problème sera résolu: on saura quelle est la longueur des plus courtes superpermutations pour tout n .

QUELLE EST LA LONGUEUR MAXIMALE D'UNE SUPERPERMUTATION?

Il est tout d'abord évident que pour tout entier n , il existe une superpermutation de longueur $n \times n!$, puisqu'en mettant les unes derrière les autres sans aucune fusion les $n!$ permutations qui ont chacune n symboles, on obtient une superpermutation de longueur $n \times n!$.

La superpermutation de longueur $n \times n!$ n'est vraiment pas astucieuse, car elle n'exploite aucune possibilité de fusion. Il faut tenter de faire mieux. C'est ce que propose le très beau résultat: «Pour tout entier positif n , il existe une superpermutation de longueur $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$.»

Le gain par rapport à $n \times n!$ est d'autant plus important que n est grand. Un petit calcul montre en effet que pour $n=3$ le gain est 9, pour $n=4$ le gain est 63, pour $n=5$ le gain est 447, pour $n=6$ le gain est 3447, pour $n=7$ le gain est 35280, pour $n=8$ le gain est 322560.

La démonstration que $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ symboles suffisent toujours pour une superpermutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ résulte d'une construction qui permet de nombreuses fusions, et d'un magnifique raisonnement proposé en 2013 par Nathaniel Johnston, de l'université Mount Allison, à Sackville, au Canada. La construction exploite l'idée que d'une superpermutation pour n à la suivante pour $n+1$, on peut réexploiter les fusions qu'on a su faire et donc que les nouvelles fusions qu'on introduit à chaque étape et les fusions réussies à l'étape précédente se cumulent et permettent des économies de plus en plus importantes en nombre de symboles (voir l'encadré 3).

Pour récapituler, désignons par $S(n)$ la longueur de la plus courte superpermutation pour n . Pour $n=1, 2, 3$, le problème est réglé: $S(1)=1$ (évident); $S(2)=3$ (évident); $S(3)=9$ (on l'a expliqué plus haut et dans l'encadré 1).

Compte tenu du meilleur minorant et du meilleur majorant connus, nous savons que pour

2

PERMUTATIONS ET FACTORIELLES

Les diverses façons de ranger un ensemble de n éléments, ou permutations de cet ensemble, sont au nombre de $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ (factorielle n): on choisit l'élément à mettre en tête (n possibilités); on choisit l'élément à placer en deuxième ($n-1$ possibilités); etc. La suite des factorielles croît très rapidement:

0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 000
16	20 922 789 888 000
17	355 687 428 096 000
18	6 402 373 705 728 000

Il existe ainsi $4! = 24$ permutations de 4 éléments, et donc 24 façons de ranger ces permutations. Ci-contre, on a pris 4 couleurs et on a dessiné 9 des 24 façons d'ordonner les permutations de ces couleurs.

