

> Connaître un minorant ne garantit pas qu'on trouvera une superpermutation de la longueur indiquée; c'est seulement l'affirmation qu'il est impossible de faire plus court. Après avoir cherché les minorants de la taille de la meilleure superpermutation, il est naturel de s'intéresser aux majorants en essayant cette fois de trouver les plus petits possible. Si l'on réussit à faire se rejoindre les minorants et les majorants, le problème sera résolu: on saura quelle est la longueur des plus courtes superpermutations pour tout n .

QUELLE EST LA LONGUEUR MAXIMALE D'UNE SUPERPERMUTATION?

Il est tout d'abord évident que pour tout entier n , il existe une superpermutation de longueur $n \times n!$, puisqu'en mettant les unes derrière les autres sans aucune fusion les $n!$ permutations qui ont chacune n symboles, on obtient une superpermutation de longueur $n \times n!$.

La superpermutation de longueur $n \times n!$ n'est vraiment pas astucieuse, car elle n'exploite aucune possibilité de fusion. Il faut tenter de faire mieux. C'est ce que propose le très beau résultat: «Pour tout entier positif n , il existe une superpermutation de longueur $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$.»

Le gain par rapport à $n \times n!$ est d'autant plus important que n est grand. Un petit calcul montre en effet que pour $n=3$ le gain est 9, pour $n=4$ le gain est 63, pour $n=5$ le gain est 447, pour $n=6$ le gain est 3447, pour $n=7$ le gain est 35280, pour $n=8$ le gain est 322560.

La démonstration que $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ symboles suffisent toujours pour une superpermutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ résulte d'une construction qui permet de nombreuses fusions, et d'un magnifique raisonnement proposé en 2013 par Nathaniel Johnston, de l'université Mount Allison, à Sackville, au Canada. La construction exploite l'idée que d'une superpermutation pour n à la suivante pour $n+1$, on peut réexploiter les fusions qu'on a su faire et donc que les nouvelles fusions qu'on introduit à chaque étape et les fusions réussies à l'étape précédente se cumulent et permettent des économies de plus en plus importantes en nombre de symboles (voir l'encadré 3).

Pour récapituler, désignons par $S(n)$ la longueur de la plus courte superpermutation pour n . Pour $n=1, 2, 3$, le problème est réglé: $S(1)=1$ (évident); $S(2)=3$ (évident); $S(3)=9$ (on l'a expliqué plus haut et dans l'encadré 1).

Compte tenu du meilleur minorant et du meilleur majorant connus, nous savons que pour

2

PERMUTATIONS ET FACTORIELLES

Les diverses façons de ranger un ensemble de n éléments, ou permutations de cet ensemble, sont au nombre de $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ (factorielle n): on choisit l'élément à mettre en tête (n possibilités); on choisit l'élément à placer en deuxième ($n-1$ possibilités); etc. La suite des factorielles croît très rapidement:

0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 000
16	20 922 789 888 000
17	355 687 428 096 000
18	6 402 373 705 728 000

Il existe ainsi $4! = 24$ permutations de 4 éléments, et donc 24 façons de ranger ces permutations. Ci-contre, on a pris 4 couleurs et on a dessiné 9 des 24 façons d'ordonner les permutations de ces couleurs.

