

> Connaître un minorant ne garantit pas qu'on trouvera une superpermutation de la longueur indiquée; c'est seulement l'affirmation qu'il est impossible de faire plus court. Après avoir cherché les minorants de la taille de la meilleure superpermutation, il est naturel de s'intéresser aux majorants en essayant cette fois de trouver les plus petits possible. Si l'on réussit à faire se rejoindre les minorants et les majorants, le problème sera résolu: on saura quelle est la longueur des plus courtes superpermutations pour tout n .

QUELLE EST LA LONGUEUR MAXIMALE D'UNE SUPERPERMUTATION?

Il est tout d'abord évident que pour tout entier n , il existe une superpermutation de longueur $n \times n!$, puisqu'en mettant les unes derrière les autres sans aucune fusion les $n!$ permutations qui ont chacune n symboles, on obtient une superpermutation de longueur $n \times n!$.

La superpermutation de longueur $n \times n!$ n'est vraiment pas astucieuse, car elle n'exploite aucune possibilité de fusion. Il faut tenter de faire mieux. C'est ce que propose le très beau résultat: «Pour tout entier positif n , il existe une superpermutation de longueur $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$.»

Le gain par rapport à $n \times n!$ est d'autant plus important que n est grand. Un petit calcul montre en effet que pour $n=3$ le gain est 9, pour $n=4$ le gain est 63, pour $n=5$ le gain est 447, pour $n=6$ le gain est 3447, pour $n=7$ le gain est 35280, pour $n=8$ le gain est 322560.

La démonstration que $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ symboles suffisent toujours pour une superpermutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ résulte d'une construction qui permet de nombreuses fusions, et d'un magnifique raisonnement proposé en 2013 par Nathaniel Johnston, de l'université Mount Allison, à Sackville, au Canada. La construction exploite l'idée que d'une superpermutation pour n à la suivante pour $n+1$, on peut réexploiter les fusions qu'on a su faire et donc que les nouvelles fusions qu'on introduit à chaque étape et les fusions réussies à l'étape précédente se cumulent et permettent des économies de plus en plus importantes en nombre de symboles (voir l'encadré 3).

Pour récapituler, désignons par $S(n)$ la longueur de la plus courte superpermutation pour n . Pour $n=1, 2, 3$, le problème est réglé: $S(1)=1$ (évident); $S(2)=3$ (évident); $S(3)=9$ (on l'a expliqué plus haut et dans l'encadré 1).

Compte tenu du meilleur minorant et du meilleur majorant connus, nous savons que pour

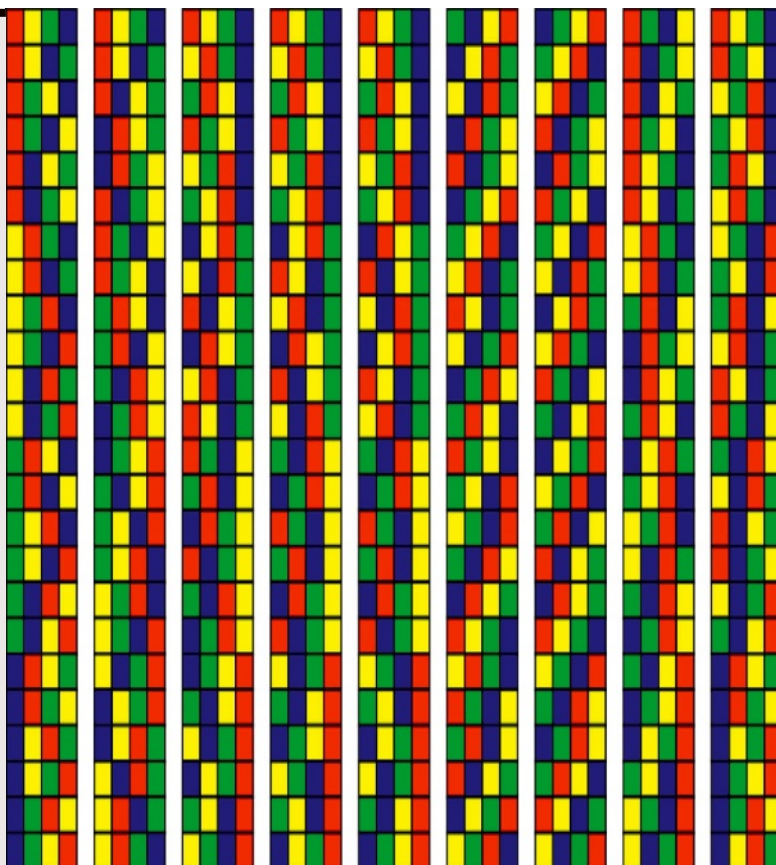
2

PERMUTATIONS ET FACTORIELLES

Les diverses façons de ranger un ensemble de n éléments, ou permutations de cet ensemble, sont au nombre de $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ (factorielle n): on choisit l'élément à mettre en tête (n possibilités); on choisit l'élément à placer en deuxième ($n-1$ possibilités); etc. La suite des factorielles croît très rapidement:

0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 000
16	20 922 789 888 000
17	355 687 428 096 000
18	6 402 373 705 728 000

Il existe ainsi $4! = 24$ permutations de 4 éléments, et donc 24 façons de ranger ces permutations. Ci-contre, on a pris 4 couleurs et on a dessiné 9 des 24 façons d'ordonner les permutations de ces couleurs.



tout $n \geq 4$, on a :

$$n! + (n-1)! + (n-2)! + \dots + 2! + 1 \leq S(n) \leq$$

$$n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1.$$

Pour $n=4$, cela signifie: $24+6+2+1=33 \leq S(4) \leq 24+6+2+1=33$. La superpermutation obtenue par la méthode décrite dans l'encadré 2 est: 123412314231243121342132413214321. Sa longueur est 33, c'est donc le meilleur résultat possible.

Un calcul par programme donne des informations plus précises. Il permet de savoir que les seules autres superpermutations possibles sont les $4!=24$ que l'on déduit de celle donnée ci-dessus par permutation des symboles et qu'il n'y en a pas d'autres. À titre d'exemple donnons l'une des superpermutations obtenue par permutation des symboles de la superpermutation donnée. Si on change 1 en 2, 2 en 3, 3 en 4 et 4 en 1, on obtient la superpermutation:

234123421342314232413243124321432.

Pendant près de vingt ans, l'hypothèse naturelle que la formule $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ donnait la longueur minimale d'une superpermutation pour n a été admise, jusqu'à ce que l'étude des cas $n=5$ et $n=6$ change la situation.

Pour $n=5$, la méthode de l'encadré 3 fournit une superpermutation de longueur $5! + 4! + 3! + 2! + 1 = 153$. Faire un programme assez efficace qui, pour $n=5$, essaie de trouver mieux sans rien oublier, ou montre qu'on ne peut pas faire mieux que 153, n'est pas facile. Pourtant, en mars 2014, Ben Chaffin a réussi, et son astucieux programme d'exploration a découvert 8 superpermutations de longueur 153 dont aucune ne se ramène à une autre par changement des noms des symboles. Chacune des 8 superpermutations donne $120=5!$ superpermutations par les changements des noms des symboles. Le programme montre aussi que 153 est impossible à améliorer. Voici l'une des huit superpermutations trouvées: 1234512341523415234123541231452314235142315423124531243512431524312543121345213425134215342135421324513241532413524132541321453214352143251432154321 (voir www.njohnston.ca/superperm5.txt et www.njohnston.ca/2014/08/all-minimal-superpermutations-on-five-symbols-have-been-found/).

Ce résultat établit que le minorant découvert grâce à l'internaute anonyme n'est pas assez précis: pour $n=5$, il n'existe pas de superpermutations correspondant au minorant annoncé. Mais ce résultat montre aussi que la méthode de l'encadré 3 ne donne pas tout ce qui est possible, et suggère qu'il est possible d'améliorer le majorant $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$.

Ce qui se passe pour $n=6$ prouve effectivement que le majorant connu n'est pas assez précis, lui non plus. La formule $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ cesse d'être valable pour $S(6)$. Robin Houston s'en est aperçu en comprenant que les algorithmes de résolution du problème du voyageur de commerce

3

SUPERPERMUTATION DE LONGUEUR $N! + (N-1)! + \dots + 2! + 1$

Pour tout entier positif n , il existe une superpermutation dont la longueur est : $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$. Voyons la superbe démonstration de ce résultat proposé en 2013 par Nathaniel Johnston.

Pour $n=3$, on a une superpermutation de longueur 9, et on a bien $9 = 3! + 2! + 1$. De même, pour $n=4$, on a une superpermutation de longueur 33 = $4! + 3! + 2! + 1$. Le résultat est donc vrai pour $n=3$ et $n=4$.

Raisonnons par récurrence : on suppose vrai le résultat pour n et on cherche à prouver qu'il est alors vrai pour $n+1$. Pour suivre le raisonnement, on détaillera les étapes pour passer d'une superpermutation correspondant à $n=3$ à une superpermutation correspondant à $n=4$, mais la méthode est générale et permet de passer d'une superpermutation de longueur $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$, pour n , à une superpermutation de longueur $(n+1)! + n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$, pour $n+1$.

Prenons donc une superpermutation pour $n=3$ de longueur $1 + 2! + 3! = 123121321$. Faisons apparaître toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ dans l'ordre où elles se présentent : 123, 231, 312, 213, 132, 321 (nous n'avons pas fait apparaître 121, car ce n'est pas une permutation).

On accole ces permutations en fusionnant ce qui peut l'être : par exemple, on accole 123 et 231 qui donne 1231, car on exploite que 123 finit par 23 et que 231 commence par 23. Après toutes les fusions, nous obtenons une suite 123121321 de longueur $9 = 3! + 2! + 1!$ comme prévu.

Maintenant, partant de la liste des permutations 123, 231, 312, 213, 132, 321, nous en construisons une nouvelle en doublant chaque

permutation et en plaçant un 4 entre les permutations identiques : 123 4 123, 231 4 231, 312 4 312, 213 4 213, 132 4 132, 321 4 321.

Fusionnons maintenant le plus possible les termes de cette suite. Pour $n=4$, nous obtenons 123412314231243121342132413214321. Ce que nous gagnons grâce aux fusions est égal à ce que nous avons gagné (9 chiffres) en fusionnant 123, 231, 312, 213, 132, 321 pour obtenir 123121321. Par hypothèse de récurrence, dans le cas général, cela fait gagner $n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)$ symboles.

Dans le cas général (et pour $n+1$), la suite que nous obtenons par ces fusions a pour longueur :

$$2n \times n! + n! - [n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)]$$

Le premier terme, $2n \times n!$, provient de ce qu'on a copié 2 fois les $n!$ permutations, qui sont chacune de longueur n ; le second terme provient de la copie n fois la valeur $n+1$ (le 4 dans notre exemple) ; et le terme soustrait provient de ce qu'on gagne grâce aux fusions.

L'expression obtenue se simplifie : $2n \times n! + n! - [n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)] = n \times n! + n! + (1 + 2! + \dots + n!)$

$= n! \times (n+1) + (1 + 2! + \dots + n!)$
 $= 1 + 2! + \dots + n! + (n+1)!.$

La suite de nombres de notre construction a donc pour longueur $1 + 2! + \dots + n! + (n+1)!.$

Montrons maintenant qu'elle contient bien toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Toute permutation P de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ est de la forme $A(n+1)B$ où A et B sont des suites utilisant au total n nombres tous différents pris dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et donc telles que AB est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Cela signifie que P se trouve quelque part dans ce que nous avons construit, car quelque part nous avons la séquence $AB(n+1)AB$. CQFD.

