

tout $n \geq 4$, on a :

$$n! + (n-1)! + (n-2)! + \dots + 2! + 1 \leq S(n) \leq$$

$$n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1.$$

Pour $n=4$, cela signifie : $24+6+2+1=33 \leq S(4) \leq 24+6+2+1=33$. La superpermutation obtenue par la méthode décrite dans l'encadré 2 est : 123412314231243121342132413214321. Sa longueur est 33, c'est donc le meilleur résultat possible.

Un calcul par programme donne des informations plus précises. Il permet de savoir que les seules autres superpermutations possibles sont les $4! = 24$ que l'on déduit de celle donnée ci-dessus par permutation des symboles et qu'il n'y en a pas d'autres. À titre d'exemple donnons l'une des superpermutations obtenue par permutation des symboles de la superpermutation donnée. Si on change 1 en 2, 2 en 3, 3 en 4 et 4 en 1, on obtient la superpermutation :

234123421342314232413243124321432.

Pendant près de vingt ans, l'hypothèse naturelle que la formule $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ donnait la longueur minimale d'une superpermutation pour n a été admise, jusqu'à ce que l'étude des cas $n=5$ et $n=6$ change la situation.

Pour $n=5$, la méthode de l'encadré 3 fournit une superpermutation de longueur $5! + 4! + 3! + 2! + 1 = 153$. Faire un programme assez efficace qui, pour $n=5$, essaie de trouver mieux sans rien oublier, ou montre qu'on ne peut pas faire mieux que 153, n'est pas facile. Pourtant, en mars 2014, Ben Chaffin a réussi, et son astucieux programme d'exploration a découvert 8 superpermutations de longueur 153 dont aucune ne se ramène à une autre par changement des noms des symboles. Chacune des 8 superpermutations donne $120 = 5!$ superpermutations par les changements des noms des symboles. Le programme montre aussi que 153 est impossible à améliorer. Voici l'une des huit superpermutations trouvées : 12345123415234125341235412314523142351423154231245312431512431524315243121345213425134215342135421324513241532413524132541321453214352143251432154321 (voir www.njohnston.ca/superperm5.txt et www.njohnston.ca/2014/08/all-minimal-superpermutations-on-five-symbols-have-been-found/).

Ce résultat établit que le minorant découvert grâce à l'internaute anonyme n'est pas assez précis : pour $n=5$, il n'existe pas de superpermutations correspondant au minorant annoncé. Mais ce résultat montre aussi que la méthode de l'encadré 3 ne donne pas tout ce qui est possible, et suggère qu'il est possible d'améliorer le majorant $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$.

Ce qui se passe pour $n=6$ prouve effectivement que le majorant connu n'est pas assez précis, lui non plus. La formule $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ cesse d'être valable pour $S(6)$. Robin Houston s'en est aperçu en comprenant que les algorithmes de résolution du problème du voyageur de commerce

3

SUPERPERMUTATION DE LONGUEUR $N! + (N-1)! + \dots + 2! + 1$

Pour tout entier positif n , il existe une superpermutation dont la longueur est : $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$. Voyons la superbe démonstration de ce résultat proposé en 2013 par Nathaniel Johnston.

Pour $n=3$, on a une superpermutation de longueur 9, et on a bien $9 = 3! + 2! + 1$. De même, pour $n=4$, on a une superpermutation de longueur 33 = $4! + 3! + 2! + 1$. Le résultat est donc vrai pour $n=3$ et $n=4$.

Raisonnons par récurrence : on suppose vrai le résultat pour n et on cherche à prouver qu'il est alors vrai pour $n+1$. Pour suivre le raisonnement, on détaillera les étapes pour passer d'une superpermutation correspondant à $n=3$ à une superpermutation correspondant à $n=4$, mais la méthode est générale et permet de passer d'une superpermutation de longueur $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$, pour n , à une superpermutation de longueur $(n+1)! + n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$, pour $n+1$.

Prenons donc une superpermutation pour $n=3$ de longueur $1 + 2! + 3! = 123121321$. Faisons apparaître toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ dans l'ordre où elles se présentent : 123, 231, 312, 213, 132, 321 (nous n'avons pas fait apparaître 121, car ce n'est pas une permutation).

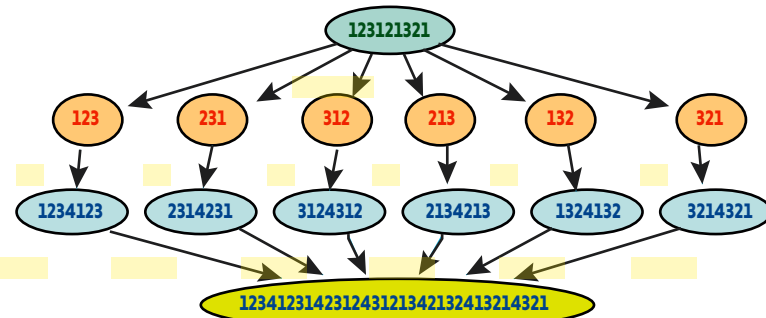
On accole ces permutations en fusionnant ce qui peut l'être : par exemple, on accole 123 et 231 qui donne 1231, car on exploite que 123 finit par 23 et que 231 commence par 23. Après toutes les fusions, nous obtenons une suite 123121321 de longueur $9 = 3! + 2! + 1!$ comme prévu.

Maintenant, partant de la liste des permutations 123, 231, 312, 213, 132, 321, nous en construisons une nouvelle en doublant chaque

permutation et en plaçant un 4 entre les permutations identiques : 123 4 123, 231 4 231, 312 4 312, 213 4 213, 132 4 132, 321 4 321. Fusionnons maintenant le plus possible les termes de cette suite. Pour $n=4$, nous obtenons 123412314231243121342132413214321. Ce que nous gagnons grâce aux fusions est égal à ce que nous avons gagné (9 chiffres) en fusionnant 123, 231, 312, 213, 132, 321 pour obtenir 123121321. Par hypothèse de récurrence, dans le cas général, cela fait gagner $n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)$ symboles.

Dans le cas général (et pour $n+1$), la suite que nous obtenons par ces fusions a pour longueur : $2n \times n! + n! - [n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)]$. Le premier terme, $2n \times n!$, provient de ce qu'on a copié 2 fois les $n!$ permutations, qui sont chacune de longueur n ; le second terme provient de la copie n fois la valeur $n+1$ (le 4 dans notre exemple) ; et le terme soustrait provient de ce qu'on gagne grâce aux fusions. L'expression obtenue se simplifie : $2n \times n! + n! - [n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)] = n \times n! + n! + (1 + 2! + \dots + n!)$ $= n! (n+1) + (1 + 2! + \dots + n!)$ $= 1 + 2! + \dots + n! + (n+1)!$. La suite de nombres de notre construction a donc pour longueur $1 + 2! + \dots + n! + (n+1)!$.

Montrons maintenant qu'elle contient bien toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Toute permutation P de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ est de la forme $A(n+1)B$ où A et B sont des suites utilisant au total n nombres tous différents pris dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et donc telles que AB est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Cela signifie que P se trouve quelque part dans ce que nous avons construit, car quelque part nous avons la séquence $AB(n+1)AB$. CQFD.



4

LE PROBLÈME DU
VOYAGEUR DE COMMERCE

Un certain nombre de villes sont données, et on connaît le réseau des routes reliant les villes. Quand il existe une route entre deux villes, on connaît la longueur de la route qui les relie. Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver un plan de tournée pour visiter toutes les villes, une seule fois chacune, en faisant le trajet le plus court possible.

Savoir si, pour une longueur L donnée, il existe une solution donnant un plan de voyage de moins de L kilomètres est un problème de la catégorie NP-complet. Cela signifie qu'on ne sait pas le résoudre rapidement (en temps polynomial), et que si on le savait, on saurait résoudre rapidement (en temps polynomial) tous les problèmes d'une large classe de problèmes (la classe NP), ce qui semble improbable. Dit de façon plus simple : on ne sait pas résoudre rapidement le problème général du voyageur de commerce et il est improbable qu'on le sache un jour ; il faut se contenter de méthodes lentes, ou de méthodes qui ne garantissent pas le meilleur résultat possible.

Il existe de telles méthodes ainsi que des programmes qui donnent des résultats assez bons, même si ce ne sont pas les meilleurs possibles. Par exemple, Julien Coupey, qui travaillait sur la mobilité à l'institut Femto-ST de Besançon et qui travaille aujourd'hui pour la start-up Verso, développe un programme qui traite des tournées sur un assez grand nombre de villes. Ainsi, pour un problème concernant 93 villes françaises, son programme propose la solution figurée en haut.



Or résoudre le problème des superpermutations se ramène à un problème de voyageur de commerce. Expliquons l'idée sur un exemple en prenant $n = 3$.

Les permutations de $\{1, 2, 3\}$ sont 123, 132, 213, 231, 312, 321. Une superpermutation est comme un trajet reliant ces permutations. Entre deux permutations, la distance qui les sépare peut être 1, 2 ou 3 :

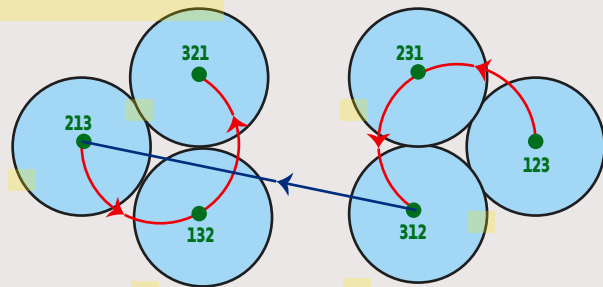
- entre 123 et 231, la distance est 1, car en fusionnant correctement 123 et 231, ce qui donne 1231, on n'allonge 123 que d'un seul symbole ;
- entre 123 et 312, la distance est 2, car en fusionnant les deux permutations, on obtient 12312, qui allonge 123 de deux symboles ;
- entre 123 et 132, la distance est 3, car aucune fusion n'est possible et donc si on veut les deux permutations l'une après l'autre, il faut prendre 123132, qui allonge 123 de trois symboles.

Cette façon de voir les permutations et leurs distances mutuelles définit l'équivalent d'une carte avec des distances. Le problème de trouver une superpermutation devient alors

celui de trouver le plus court plan de tournées pour le voyageur de commerce qui veut visiter toutes les permutations sur cette carte.

Le dessin ci-dessous de Greg Egan représente la carte du voyageur de commerce pour $n = 3$: les « routes » de longueur 1 entre permutations sont dessinées en rouge, celle de longueur 2 (entre 312 et 213) est dessinée en bleu. Les autres « routes » ne sont pas dessinées. La superpermutation la plus courte possible, 123121321, de longueur 9, est représentée par la succession de cinq routes : deux en rouge, une en bleu, deux en rouge.

Le problème du voyageur de commerce est un problème important en mathématiques appliquées, car de nombreux problèmes s'y ramènent. On a développé et perfectionné les méthodes et programmes pour le résoudre. Ces méthodes ont été utilisées pour résoudre le problème des superpermutations et ont conduit à une série de records (voir le texte principal).



> (voir l'encadré 4) s'adaptent au problème, et que, grâce à ceux mis au point par les chercheurs en mathématiques appliquées, on montre qu'il existe une superpermutation de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui, au lieu d'avoir la longueur $6! + 5! + 4! + 3! + 2! + 1 = 873$, n'a que 872 symboles. Le résultat est catastrophique pour le majorant théorique connu, car à partir de cette superpermutation pour $n=6$, on peut, en utilisant la méthode de l'encadré 3, en trouver qui battent $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ pour tout n supérieur à 6.

Un progrès théorique confirme ce que le calcul par ordinateur a montré. En utilisant une idée de 2013 du mathématicien canadien Aaron William, l'écrivain de science-fiction Greg Egan a en effet proposé une construction du même type que celle indiquée dans l'encadré 3, qui cette fois indique qu'on pourra pour tout $n \geq 6$ avoir une superpermutation dont la longueur ne dépassera pas $n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + (n-3)$.

L'encadrement théorique de $S(n)$ est devenu meilleur : $n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3) \leq S(n) \leq n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + (n-3)$.

Le côté droit et le côté gauche semblent proches. C'est une illusion, car l'écart entre les deux est $(n-3)!$, quantité qui croît très rapidement quand n augmente.

La méthode générale d'Aaron William et Greg Egan pour $n=7$ donne une superpermutation de longueur 5908, ce qui économise 5 symboles par rapport à $5913 = 7! + 6! + 5! + 4! + 3! + 2! + 1$. Pour $n=8$, la méthode donne une longueur de 46205, soit un gain de 28 par rapport à $46233 = 8! + 7! + \dots + 2! + 1$. Pour $n=9$, la méthode donne une longueur de 408966, soit 147 de moins que $409113 = 9! + 8! + \dots + 2! + 1$.

La nouvelle méthode est certainement très bonne, mais ce n'est pas la méthode ultime. En effet, pour $n=7$, un programme de Bogdan Coanda a trouvé une superpermutation de longueur 5907, meilleure que le 5908 de la méthode d'Aaron William et Greg Egan, record encore battu par une superpermutation de longueur 5906 trouvée récemment par un programme cette fois de Robin Houston.

Aujourd'hui, certains pensent qu'on est proche d'une solution définitive pour tout n , mais rien n'est gagné, et pour l'instant on n'a de certitude concernant $S(n)$ que pour $S(1)=1$, $S(2)=3$, $S(3)=9$, $S(4)=33$ et $S(5)=153$.

QUELQUES PROBLÈMES PROCHES

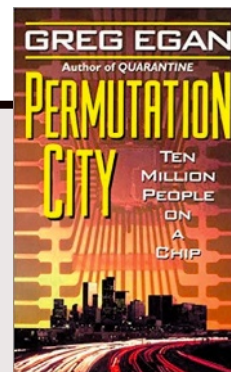
D'autres problèmes se posent ressemblant à celui des superpermutations.

Les suites de De Bruijn, auxquelles nous avons consacré une rubrique (« Un tour de cartes mathématique », *Pour la Science*, n° 441, juillet 2014), consiste à rechercher une séquence qui contient non pas toutes les permutations, mais toutes les séquences d'une longueur fixée k utilisant n symboles. Par

5

GREG EGAN

Greg Egan, né en 1961, est un auteur de science-fiction canadien, ainsi qu'un programmeur, qui s'intéresse au problème des superpermutations. Il propose un site internet sur le problème : www.gregegan.net/SCIENCE/Superpermutations/Superpermutations.html Il a publié un roman à succès traduit en français : *Permutation City* ou *La Cité des permuteurs*, qui traite des mondes multiples et qui, malgré son titre, ne traite pas de superpermutations !



exemple, la suite de De Bruijn 000001001011001111000110111010101 contient les 32 suites possibles de longueur 5, composées de 0 et de 1. On y trouve donc 00000, 00001, 00010, 00011, ... Dans le problème de De Bruijn, on considère que la suite est refermée sur elle-même et donc qu'une fois arrivée au bout, on repart au début. C'est important, car la suite 10100 n'est obtenue qu'en prenant les trois derniers symboles et les deux premiers.

Le problème de la longueur des suites de De Bruijn est plus simple que celui des superpermutations, puisqu'on sait par exemple démontrer qu'il existe des suites de De Bruijn de longueur 2^k pour tout k dans le cas du problème des suites de 0 et de 1 de longueur k , et que ce résultat est le meilleur possible.

Un problème assez proche encore de celui des superpermutations est étudié par les mathématiciens en considérant la notion de suite extraite. Si on prend la suite 1232132, on y trouve 123, 132, 213, 231, 312, 321, mais cette fois ce n'est vrai qu'en acceptant de prendre les symboles recherchés même s'ils ne sont pas côte à côte (on parle de « suite extraite »). Par exemple, 231 s'obtient en prenant les symboles rouges dans 1232132 et 312 s'obtient en prenant les symboles rouges dans 1232132.

On a montré que le plus petit entier égalant ou dépassant $n^2 - 7n/3 + 19/3$ est toujours une longueur suffisante pour réussir à avoir une suite extraite pour chaque permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ce nombre est cependant un simple majorant et, comme dans le cas des superpermutations, on ne sait pas exactement quelle est, avec certitude, la plus petite longueur suffisante pour n .

Les problèmes de tassement de données sont plus délicats qu'on ne l'avait imaginé ! ■

BIBLIOGRAPHIE

Numberphile, **Superpermutation**, 2020 : www.youtube.com/embed/wJGE4aEWc28?end=476

N. Jonhston, **The Minimal Superpermutation Problem**, 10 avril 2013 : <https://bit.ly/2LfgPQX>

P. Honner, **Unscrambling the hidden secrets of superpermutations**, *Quanta Magazine*, 16 janvier 2019 : <https://bit.ly/2zxRQKz>

Anonymous 4chan Poster et al., **A lower bound on the length of the shortest superpattern**, 25 octobre 2018 : <https://oeis.org/A180632/a180632.pdf>

M. Engen et V. Vatter, **Containing all permutations**, prépublication arXiv :1810.08252, 2018 (<https://arxiv.org/pdf/1810.08252.pdf>).

R. Houston, **Tackling the minimal superpermutation problem**, prépublication arXiv :1408.5108, 2014 (<https://arxiv.org/pdf/1408.5108.pdf>).