

> (voir l'encadré 4) s'adaptent au problème, et que, grâce à ceux mis au point par les chercheurs en mathématiques appliquées, on montre qu'il existe une superpermutation de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui, au lieu d'avoir la longueur $6!+5!+4!+3!+2!+1 = 873$, n'a que 872 symboles. Le résultat est catastrophique pour le majorant théorique connu, car à partir de cette superpermutation pour $n=6$, on peut, en utilisant la méthode de l'encadré 3, en trouver qui battent $n!+(n-1)!+\dots+2!+1$ pour tout n supérieur à 6.

Un progrès théorique confirme ce que le calcul par ordinateur a montré. En utilisant une idée de 2013 du mathématicien canadien Aaron William, l'écrivain de science-fiction Greg Egan a en effet proposé une construction du même type que celle indiquée dans l'encadré 3, qui cette fois indique qu'on pourra pour tout $n \geq 6$ avoir une superpermutation dont la longueur ne dépassera pas $n!+(n-1)!+(n-2)!+(n-3)!+(n-3)$.

L'encadrement théorique de $S(n)$ est devenu meilleur : $n!+(n-1)!+(n-2)!+(n-3) \leq S(n) \leq n!+(n-1)!+(n-2)!+(n-3)!+(n-3)$.

Le côté droit et le côté gauche semblent proches. C'est une illusion, car l'écart entre les deux est $(n-3)!$, quantité qui croît très rapidement quand n augmente.

La méthode générale d'Aaron William et Greg Egan pour $n=7$ donne une superpermutation de longueur 5908, ce qui économise 5 symboles par rapport à $5913 = 7!+6!+5!+4!+3!+2!+1$. Pour $n=8$, la méthode donne une longueur de 46205, soit un gain de 28 par rapport à $46233 = 8!+7!+\dots+2!+1$. Pour $n=9$, la méthode donne une longueur de 408966, soit 147 de moins que $409113 = 9!+8!+\dots+2!+1$.

La nouvelle méthode est certainement très bonne, mais ce n'est pas la méthode ultime. En effet, pour $n=7$, un programme de Bogdan Coanda a trouvé une superpermutation de longueur 5907, meilleure que le 5908 de la méthode d'Aaron William et Greg Egan, record encore battu par une superpermutation de longueur 5906 trouvée récemment par un programme cette fois de Robin Houston.

Aujourd'hui, certains pensent qu'on est proche d'une solution définitive pour tout n , mais rien n'est gagné, et pour l'instant on n'a de certitude concernant $S(n)$ que pour $S(1)=1$, $S(2)=3$, $S(3)=9$, $S(4)=33$ et $S(5)=153$.

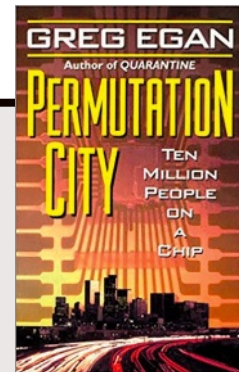
QUELQUES PROBLÈMES PROCHES

D'autres problèmes se posent ressemblant à celui des superpermutations.

Les suites de De Bruijn, auxquelles nous avons consacré une rubrique (« Un tour de cartes mathématique », *Pour la Science*, n°441, juillet 2014), consiste à rechercher une séquence qui contient non pas toutes les permutations, mais toutes les séquences d'une longueur fixée k utilisant n symboles. Par

5 GREG EGAN

Greg Egan, né en 1961, est un auteur de science-fiction canadien, ainsi qu'un programmeur, qui s'intéresse au problème des superpermutations. Il propose un site internet sur le problème : www.gregegan.net/SCIENCE/Superpermutations/Superpermutations.html Il a publié un roman à succès traduit en français : *Permutation City* ou *La Cité des permuteurs*, qui traite des mondes multiples et qui, malgré son titre, ne traite pas de superpermutations !



exemple, la suite de De Bruijn 0000010010110 0111100011011010101 contient les 32 suites possibles de longueur 5, composées de 0 et de 1. On y trouve donc 00000, 00001, 00010, 00011, ... Dans le problème de De Bruijn, on considère que la suite est refermée sur elle-même et donc qu'une fois arrivée au bout, on repart au début. C'est important, car la suite 10100 n'est obtenue qu'en prenant les trois derniers symboles et les deux premiers.

Le problème de la longueur des suites de De Bruijn est plus simple que celui des superpermutations, puisqu'on sait par exemple démontrer qu'il existe des suites de De Bruijn de longueur 2^k pour tout k dans le cas du problème des suites de 0 et de 1 de longueur k , et que ce résultat est le meilleur possible.

Un problème assez proche encore de celui des superpermutations est étudié par les mathématiciens en considérant la notion de suite extraite. Si on prend la suite 1232132, on y trouve 123, 132, 213, 231, 312, 321, mais cette fois ce n'est vrai qu'en acceptant de prendre les symboles recherchés même s'ils ne sont pas côte à côte (on parle de « suite extraite »). Par exemple, 231 s'obtient en prenant les symboles rouges dans 1232132 et 312 s'obtient en prenant les symboles rouges dans 1232132.

On a montré que le plus petit entier égalant ou dépassant $n^2 - 7n/3 + 19/3$ est toujours une longueur suffisante pour réussir à avoir une suite extraite pour chaque permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ce nombre est cependant un simple majorant et, comme dans le cas des superpermutations, on ne sait pas exactement quelle est, avec certitude, la plus petite longueur suffisante pour n .

Les problèmes de tassement de données sont plus délicats qu'on ne l'avait imaginé ! ■

BIBLIOGRAPHIE

Numberphile, **Superpermutation**, 2020 : www.youtube.com/embed/wJGE4aEWc28?end=476

N. Jonhston, **The Minimal Superpermutation Problem**, 10 avril 2013 : <https://bit.ly/2LfgPQX>

P. Honner, **Unscrambling the hidden secrets of superpermutations**, *Quanta Magazine*, 16 janvier 2019 : <https://bit.ly/2zxRQKz>

Anonymous 4chan Poster et al., **A lower bound on the length of the shortest superpattern**, 25 octobre 2018 : <https://oeis.org/A180632/a180632.pdf>

M. Engen et V. Vatter, **Containing all permutations**, prépublication arXiv :1810.08252, 2018 (<https://arxiv.org/pdf/1810.08252.pdf>).

R. Houston, **Tackling the minimal superpermutation problem**, prépublication arXiv :1408.5108, 2014 (<https://arxiv.org/pdf/1408.5108.pdf>).