

> dépasser le quart de la longueur totale: ce maximum serait atteint ici si la longueur à vide (sans tension) des élastiques était nulle.

Remarquons, en outre, que la canette ne remonte pas systématiquement dans la configuration que nous avons considérée. Pour qu'elle remonte, il faut en effet que la longueur des ficelles de sécurité soit plus longue que celle de l'élastique soutenant la moitié de la charge (sinon, on est en régime parallèle dès la première situation), et plus courte qu'une fois et demie la longueur de l'élastique tendu (sinon, le raccourcissement des élastiques ne compense pas l'allongement qui se produit lorsque la ficelle se tend).

Ce paradoxe se retrouve dans bien des domaines de la physique, par exemple en électricité où résistances et diodes remplacent nos ressorts et ficelles. Mais il y a plus proche de notre quotidien: un réseau routier, dans des villes embouteillées ou sur le trajet des vacances.

BIEN RÉPARTIR LE TRAFIC

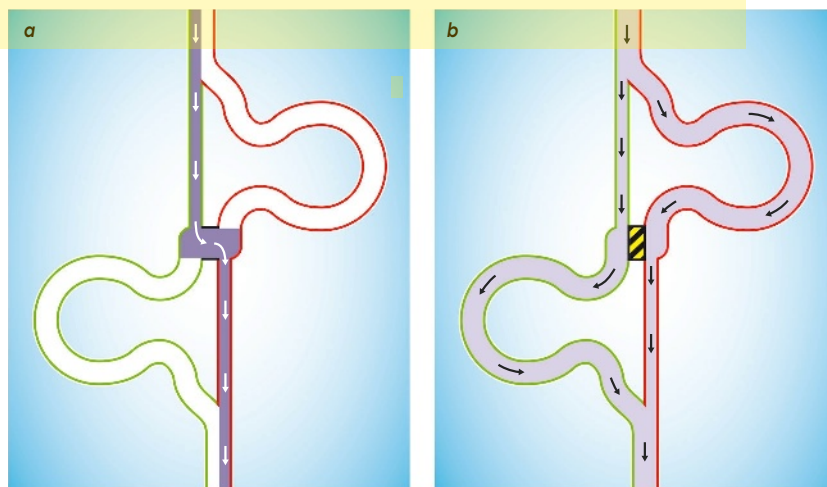
Supposons que, chaque matin, entre 7 heures et 8 heures, environ 1000 véhicules partent d'une ville A pour se rendre à la ville B, et que de chacune de ces deux villes partent une autoroute et une route étroite qui se rejoignent au niveau d'un pont commun (voir l'encadré ci-contre). L'autoroute tolère un fort trafic, mais le chemin est plus long; on suppose que la durée du trajet est de 20 minutes, indépendamment du trafic (tout comme la longueur des ficelles ne dépend pas de la charge suspendue). La route étroite est plus courte, mais davantage sujette aux embouteillages; imaginons que la durée du trajet en minutes est égale au flux horaire de véhicules divisé par 50 (c'est l'analogue de l'élastique, dont la longueur est proportionnelle à la tension). Le pont qui relie les deux points de jonction entre route et autoroute est l'analogue de la ficelle noire.

Tant qu'il y a moins de 1000 véhicules, le trajet par la petite route est plus rapide que par l'autoroute. Comme les automobilistes déterminent individuellement leur parcours, chacun d'eux choisira comme itinéraire la petite route verte puis, en passant par le pont, la petite route rouge. S'ils sont 1000, le temps de trajet total sera de $20 + 20 = 40$ minutes.

Si le pont est bloqué, le réseau présente alors deux parcours équivalents. Chaque nouvel automobiliste qui arrive a intérêt à prendre le trajet où le nombre de véhicules déjà présent est le plus petit,

LE PARADOXE ROUTIER DE BRAESS

On considère le réseau routier illustré ici, reliant une ville (en haut) à une autre (en bas). Lorsque le pont est ouvert (a), le trajet le plus court est celui passant par les routes rectilignes (mais étroites). Tous les automobilistes seront tentés de l'emprunter, au prix d'une forte densité de trafic (en violet foncé), voire d'embouteillages; le trafic est alors nul (en blanc) sur les autoroutes, plus longues. Si le pont est fermé (b), les deux trajets possibles deviennent équivalents: le trafic (en violet clair) se répartit alors équitablement entre les deux, ce qui évite la congestion du réseau.



si bien que, statistiquement, ils se répartissent de façon égale entre les deux trajets. Il y aura donc 500 véhicules sur chaque trajet, dont la durée sera de $500/50 + 20 = 30$ minutes, c'est à dire 10 minutes de moins qu'avec le pont!

L'analogue entre les deux situations n'est cependant pas parfaite: alors que la mécanique respecte scrupuleusement «les lois du monde», dans le cas du trafic routier, le résultat découle d'un choix où chacun décide ce qu'il estime le mieux pour lui. Comment se fait-il alors que le résultat global ne soit pas un temps de trajet optimal, comme l'illustre la situation avec le pont?

C'est parce que, comme Dieter Braess l'a fait remarquer, il faut bien distinguer une situation d'équilibre d'un optimum. Dans le cas du réseau routier, seule une optimisation collective permet de minimiser le temps de trajet: ce n'est que si tous les utilisateurs se mettent ensemble pour décider du chemin de chacun qu'ils peuvent réduire leur temps de trajet. Dans le cas contraire, il faut les empêcher de prendre le pont! Dans le monde réel, les recherches montrent que ce paradoxe est omniprésent dans des situations variées mais qu'il est difficile à identifier parce que l'optimisation des réseaux fait partie des problèmes dits «NP-complets», qui sont les plus complexes. ■

BIBLIOGRAPHIE

A. E. Motter et M. Timme, **Antagonistic phenomena in network dynamics**, *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 9(1), pp. 463-484, 2018.

C. M. Penchina et L. J. Penchina, **The Braess paradox in mechanical, traffic, and other networks**, *American Journal of Physics*, vol. 71(5), pp. 479-482, 2003.

C. M. Penchina, **Braess paradox: Maximum penalty in a minimal critical network**, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 31(5), pp. 379-388, 1997.

J.-M. Courty, **Un paradoxe mécanique**, vidéo de l'expérience : <https://youtu.be/GBuQxIfsnOo>