

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

DANS LES ARCANES DES TRIPLETS PYTHAGORICIENS

La géométrie des triangles rectangles a entraîné l'arithmétique des triplets pythagoriciens, connus depuis au moins deux millénaires. Ces triplets suscitent de nombreuses questions, qui ne sont pas toutes résolues.

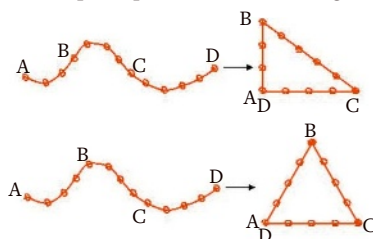
L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)

Pour disposer d'un angle droit, on prend une feuille de papier au bord bien rectiligne et on replie le bord sur lui-même, ce qui produit un pli orthogonal au bord et crée donc un angle droit parfait. Mais comment s'y prendre si, à la place d'une feuille, on n'a sous la main qu'une corde? La solution, aussi connue que merveilleuse, associe arithmétique et géométrie et illustre la profondeur magique des mathématiques. La solution, dont on ignore qui l'imagina en premier, procède en quatre étapes (schéma ci-dessous) :

- En faisant des nœuds ou à l'aide d'un crayon, on marque sur la corde deux points dont l'écart fixera l'unité de longueur.
- En tendant la corde et en la repliant, on crée 11 autres marques sur la corde, distantes deux à deux d'une unité.
- En utilisant ces 13 marques, on repère alors quatre points A, B, C et D séparés de 3 unités, puis de 4, puis de 5.
- On fait coïncider A et D et on tend la corde, ce qui donne un triangle rectangle en B (on va voir pourquoi) et donc un angle droit.



Cette corde est dénommée «corde à treize nœuds» ou «corde des druides». On peut avec

la même corde obtenir un triangle équilatéral en prenant cette fois des points A, B', C' et D de façon qu'il y ait 4 unités de longueur entre A et B', entre B' et C' et entre C' et D. On fait coïncider A et D, on tend la corde et, bien évidemment, le triangle ABC est équilatéral, ce qui donne des angles de 60°.

Ce type de manipulations était vraisemblablement utilisé au Moyen Âge par les bâtisseurs des cathédrales. On prétend parfois que les Égyptiens ont utilisé la corde à treize nœuds, mais, selon les historiens spécialistes comme Eli Maor (*voir la bibliographie*), rien ne l'atteste avec certitude.

LE PLUS VIEUX THÉORÈME?

La méthode de la corde repose sur ce qui est peut-être le plus ancien et fameux théorème, le théorème de Pythagore :

«Le carré de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.»

Plus précisément, la méthode de la corde à treize nœuds utilise la réciproque du théorème : «si le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est le plus grand côté.»

Pour le premier triangle, on a $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, ce qui justifie la méthode, mathématiquement aussi parfaite que la méthode de la feuille repliée. Notons que la corde sera plus pratique que la feuille pour dessiner des motifs géométriques dans un jardin, sur un champ ou pour contrôler la géométrie d'un édifice dont on veut que les murs ➤



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

LA TABLETTE BABYLONNIENNE PLIMPTON 322



L'interprétation de la tablette babylonienne d'argile numéro 322 de la collection Plimpton, conservée à l'université Columbia, à New York, et qui date d'environ 1800 ans avant notre ère, est débattue. Si des spécialistes pensent y reconnaître une liste de triplets pythagoriciens, d'autres n'y voient qu'une série d'exercices de calcul, ou la disposition d'une table numérique liée au système de numération en base 60 utilisé par les Babyloniens.

2

LES TRIPLETS PYTHAGORIENS PRIMITIFS ET EUCLIDIENS

Connaissant les triplets pythagoriciens (a, b, c) , on peut représenter les points de coordonnées (a, b) . Le graphique ci-contre, en haut, correspond ainsi aux valeurs de a et b inférieures à 4 500. Les droites qui partent de l'origine correspondent aux triplets qui se déduisent d'un triplet en multipliant ses composantes par un même entier.

La famille de triplets pythagoriciens attribuée à Euclide est celle de tous les triplets de la forme $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, où m et n sont des entiers et $m > n$.

À chaque triplet de ce type correspond un point P , de coordonnées rationnelles, $((m^2 - n^2)/(m^2 + n^2), 2mn/(m^2 + n^2))$, du cercle de rayon unité centré sur l'origine.

Ces coordonnées satisfont en effet l'équation $x^2 + y^2 = 1$.

La projection stéréographique du cercle unité sur la droite $y = 0$ envoie l'ensemble des points P rationnels du cercle unité associés aux triplets pythagoriciens sur les points P' à coordonnées rationnelles $(m/n, 0)$ de cette droite (schémas ci-contre). À chaque nombre rationnel correspond donc, par l'inverse de la projection stéréographique, un unique point à coordonnées rationnelles sur le cercle unitaire, ce point donnant un triplet pythagorien selon la formule d'Euclide (pour plus de détails, voir <https://bit.ly/2AtHKLM> et <https://bit.ly/3hmybik>).

