

LA TABLETTE BABYLONNIENNE PLIMPTON 322

1



L'interprétation de la tablette babylonienne d'argile numéro 322 de la collection Plimpton, conservée à l'université Columbia, à New York, et qui date d'environ 1800 ans avant notre ère, est débattue. Si des spécialistes pensent y reconnaître une liste de triplets pythagoriciens, d'autres n'y voient qu'une série d'exercices de calcul, ou la disposition d'une table numérique liée au système de numération en base 60 utilisé par les Babyloniens.

2

LES TRIPLETS PYTHAGORIENS PRIMITIFS ET EUCLIDIENS

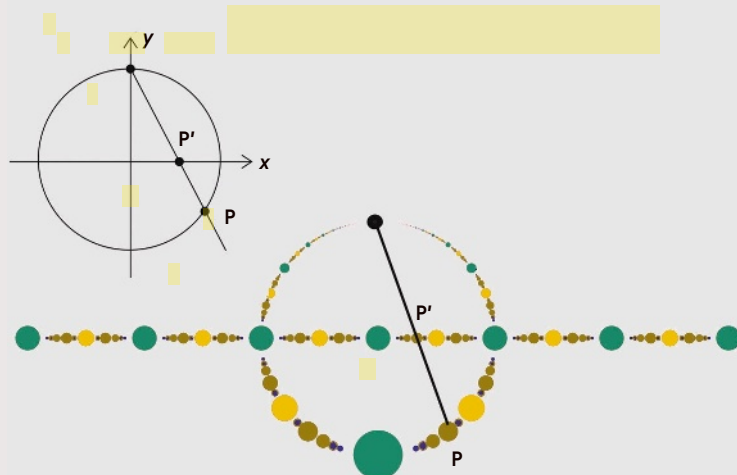
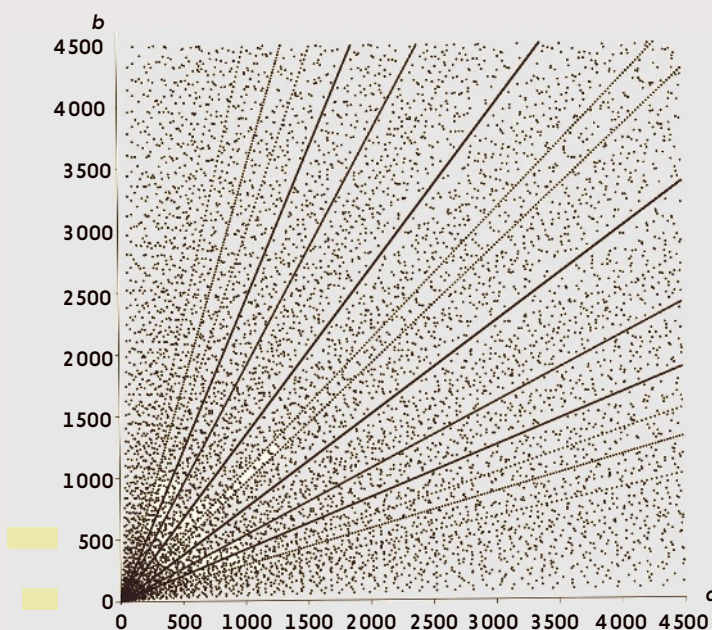
Connaissant les triplets pythagoriciens (a, b, c) , on peut représenter les points de coordonnées (a, b) . Le graphique ci-contre, en haut, correspond ainsi aux valeurs de a et b inférieures à 4 500. Les droites qui partent de l'origine correspondent aux triplets qui se déduisent d'un triplet en multipliant ses composantes par un même entier.

La famille de triplets pythagoriciens attribuée à Euclide est celle de tous les triplets de la forme $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, où m et n sont des entiers et $m > n$.

À chaque triplet de ce type correspond un point P , de coordonnées rationnelles, $((m^2 - n^2)/(m^2 + n^2), 2mn/(m^2 + n^2))$, du cercle de rayon unité centré sur l'origine.

Ces coordonnées satisfont en effet l'équation $x^2 + y^2 = 1$.

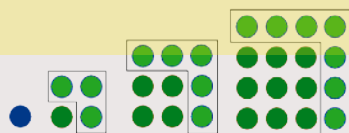
La projection stéréographique du cercle unité sur la droite $y = 0$ envoie l'ensemble des points P rationnels du cercle unité associés aux triplets pythagoriciens sur les points P' à coordonnées rationnelles $(m/n, 0)$ de cette droite (schémas ci-contre). À chaque nombre rationnel correspond donc, par l'inverse de la projection stéréographique, un unique point à coordonnées rationnelles sur le cercle unitaire, ce point donnant un triplet pythagorien selon la formule d'Euclide (pour plus de détails, voir <https://bit.ly/2AtHKLM> et <https://bit.ly/3hmybik>).



LES TRIPLETS PYTHAGORIENS DE PYTHAGORE

On attribue à Pythagore la découverte de la famille de triplets qui commence par (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), famille qu'avec nos notations nous écrivons $(a, b, c) = (2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$. On vérifie, en développant, que ces triplets satisfont la relation $a^2 + b^2 = c^2$.

Mais d'où vient la formule ? On peut raisonnablement conjecturer qu'elle provient du raisonnement géométrique fondé sur la formation des nombres carrés successifs, illustré ci-dessous.



On remarque qu'en ajoutant au carré de n le nombre impair $2n + 1$, on obtient le nombre carré suivant. Avec les notations modernes, cela se démontre immédiatement : $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Cela signifie que si la différence des carrés de deux nombres consécutifs A et $(A + 1)$ est le carré d'un nombre B , alors le triplet $(B, A, A + 1)$ est un triplet pythagoricien. On tente donc de trouver des nombres A tels que $(A + 1)^2 - A^2 = 2A + 1$ soit un carré, B^2 .

$A = 1$: $2A + 1 = 3$ n'est pas un carré ;

$A = 2$: $2A + 1 = 5$ n'est pas un carré ;

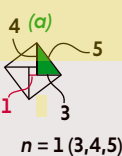
$A = 3$: $2A + 1 = 7$ n'est pas un carré ;

$A = 4$: $2A + 1 = 9$ est le carré de $B = 3$, d'où le triplet (3, 4, 5) ;

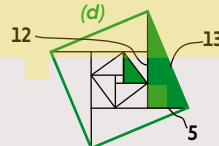
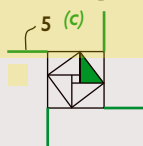
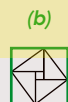
$A = 5$: $2A + 1 = 11$ n'est pas un carré ;

...

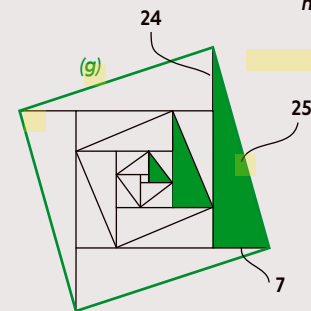
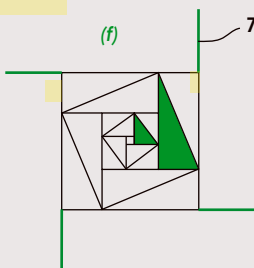
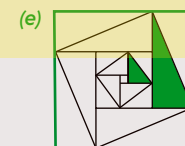
$A = 12$: $2A + 1 = 25$ est le carré de $B = 5$, d'où le triplet (5, 12, 13) ;



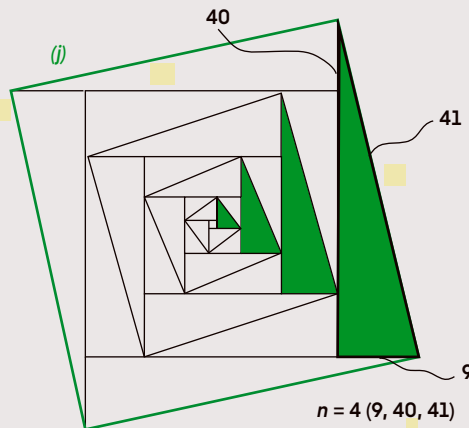
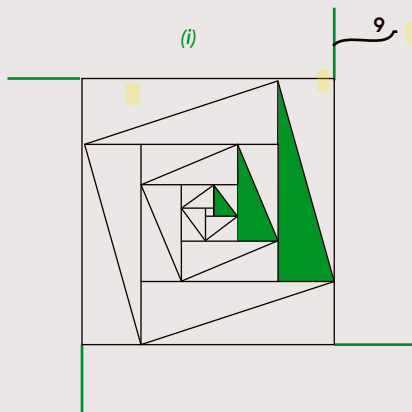
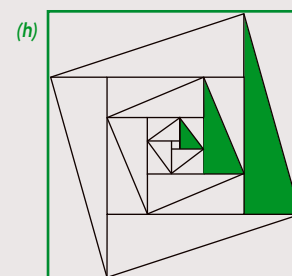
$n = 1$ (3, 4, 5)



$n = 2$ (5, 12, 13)



$n = 3$ (7, 24, 25)



$n = 4$ (9, 40, 41)

Et ainsi de suite. On observe que les entiers B qui donnent un triplet pythagoricien sont les nombres impairs successifs $B = 2n + 1$. Le nombre A qui correspond vérifie donc $2A + 1 = B^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. On trouve $A = 2n^2 + 2n$ et $A + 1 = 2n^2 + 2n + 1$. La famille de triplets pythagoriciens associée à la construction est donc : $(a, b, c) = (2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$.

En 2015, Luis Teia Gomes a découvert une intéressante et astucieuse disposition en spirale des triangles rectangles associés aux triplets de la série de Pythagore. On part de quatre triangles associés au premier triplet de la série (3, 4, 5). On les dispose selon le schéma (a). Le petit carré central a pour côté 1, car il est le résultat de la soustraction $4 - 3$. Le carré en (b) a un côté dont la longueur est la somme des longueurs des deux petits côtés du premier triangle, soit $7 = 3 + 4$. On prolonge par le nombre impair 5, (c), et cela donne en (d) le triangle associé au second triplet de la série (5, 12, 13). On recommence les mêmes opérations (e, f, g, h, i) avec les nombres impairs suivants 7, puis 9, etc.

Pour montrer que cette construction fonctionne indéfiniment, on raisonne par récurrence en supposant qu'on est arrivé au triangle donné par : $(a, b, c) = (2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$. Le petit côté du triangle suivant est le nombre impair $2n + 3$, et le second côté de ce triangle, par construction, a pour longueur la somme des deux côtés du triangle précédent et de $2n + 3$, soit : $(2n + 1) + (2n^2 + 2n) + (2n + 3) = 2n^2 + 6n + 4 = 2(n + 1)^2 + 2(n + 1)$. C'est ce qu'il nous fallait pour le triangle suivant, associé au triplet : $(2n + 3, 2(n + 1)^2 + 2(n + 1), 2(n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1)$.

4

L'ARBRE DE BERGGREN

> et le plan des pièces soient parfaitement carrés ou rectangulaires.

On dit que les trois nombres 3, 4 et 5 forment un « triplet pythagoricien », et plus généralement, c'est le nom donné à tous les triplets d'entiers positifs a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

Toute idée mathématique ouvre un territoire infini de questions auxquelles on ne répond jamais entièrement ; aujourd'hui encore, on mène des recherches sur ces triplets pythagoriciens, on formule de nouvelles conjectures qui exigent l'utilisation de puissants ordinateurs pour en venir à bout... ou qui restent sans solution. On présentera ici quelques résultats classiques et merveilleux sur les triplets pythagoriciens, puis de plus récents comme la bijection de l'arbre de Berggren, pour terminer par des conjectures liées aux colorages pythagoriciens.

IL EN EXISTE UNE INFINITÉ

Existe-t-il d'autres triplets pythagoriciens que (3, 4, 5) ? Oui, évidemment : en doublant (3, 4, 5), ce qui donne (6, 8, 10), on a bien $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Plus généralement, si (a, b, c) est un triplet pythagoricien et si d est un entier quelconque, alors (ad, bd, cd) est un autre triplet pythagoricien. Pour connaître tous les triplets pythagoriciens, on pourra donc se concentrer sur ceux dont les trois éléments ne sont pas multiples d'un même entier ; on les dénomme « triplets pythagoriciens primitifs ». Le triplet (3, 4, 5) est primitif, (6, 8, 10) ne l'est pas.

Pythagore, au VI^e siècle avant notre ère, n'a laissé aucun texte écrit et les sources diverses le concernant se contredisent. Il est cependant à peu près certain qu'il connaissait le triplet (3, 4, 5). Le philosophe Proclus de Lycie, au V^e siècle de notre ère, dans son commentaire sur le livre I des *Éléments* d'Euclide (rédigé vers 300 avant notre ère), attribue à Pythagore la découverte de la formule générale que nous notons aujourd'hui $(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)$, où n est un entier positif. Elle produit une famille infinie de triplets pythagoriciens primitifs – on vérifie en effet aisément que $(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2$ est égal à $(2n^2+2n+1)^2$. Les triplets de cette famille sont primitifs, car si d est un diviseur des trois éléments, c'est un diviseur de $2n^2+2n+1$ et de $2n^2+2n$, donc de leur différence qui est 1, d'où $d=1$. Par exemple, on obtient (3, 4, 5) pour $n=1$ et (5, 12, 13) pour $n=2$. L'encadré 1 explique l'idée géométrique à l'origine de la formule de Pythagore et montre une disposition découverte récemment permettant de combiner géométriquement tous les triplets de cette famille.

EST-CE BIEN PYTHAGORE ?

Bien sûr, les historiens se sont demandé si c'est vraiment Pythagore ou un membre de son école qui a découvert l'idée de ces triplets >

Si (a, b, c) est un triplet pythagoricien, il en va de même de :

$A(a, b, c) =$

$(a - 2b + 2c, 2a - b + 2c, 2a - 2b + 3c) ;$

$B(a, b, c) =$

$(a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c) ;$

$C(a, b, c) =$

$(-a + 2b + 2c, -2a + b + 2c,$

$-2a + 2b + 3c).$

Tout triplet pythagoricien primitif

peut s'écrire de façon unique sous

la forme d'une suite finie de

transformations A, B ou C appliquée

au triplet (3, 4, 5). Par exemple,

$CBA(3, 4, 5) = (187, 84, 205).$

Sur la figure ci-dessous, on a représenté le début de l'arbre ternaire infini engendré par A, B et C. Ce surprenant résultat ne fut démontré qu'en 1934 par un certain B. Berggren (voir la bibliographie).

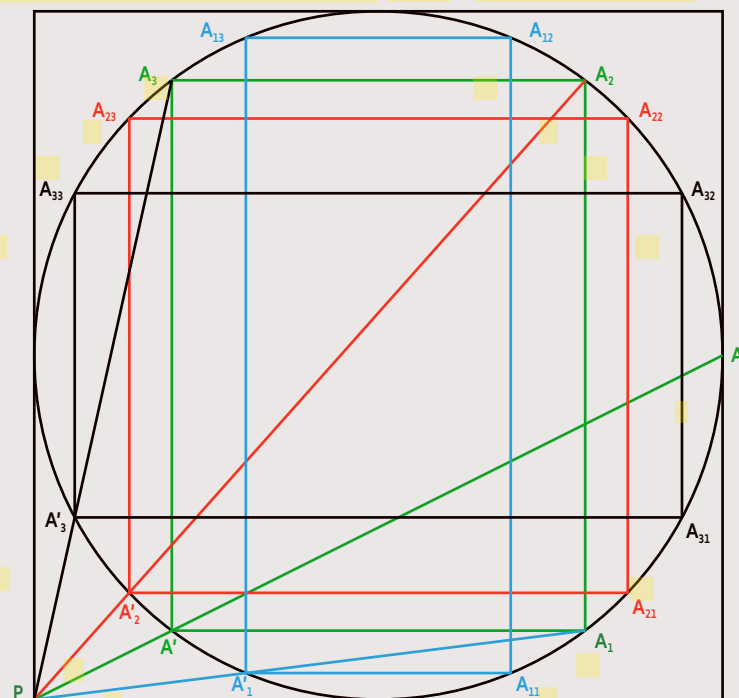
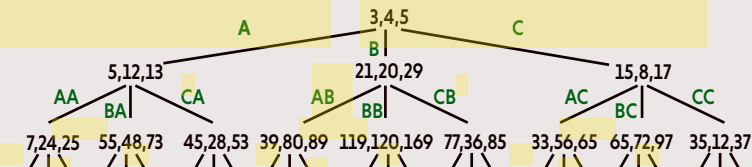
L'arbre de Berggren a une étonnante interprétation géométrique due à Roger Vogeler, mathématicien à l'université du Connecticut. On part d'un carré dans lequel est inscrit un cercle. On joint le coin en bas à gauche du carré (le point P) au point de tangence du cercle avec le carré sur le côté vertical du carré à droite (le point A). Le

segment PA coupe le cercle en un point A'. En partant de A', on construit le rectangle vert $A'A_1A_2A_3$ inscrit dans le cercle et ayant ses côtés horizontaux et verticaux. Deux côtés adjacents de ce rectangle avec la diagonale donnent un triangle rectangle de type (3, 4, 5), le premier triplet pythagoricien primitif.

À partir de A_1 , on recommence l'opération faite à partir de A. On obtient un second rectangle $A'_1A_{11}A_{12}A_{13}$ (en bleu) qui donne le triplet (5, 12, 13). La même opération à partir de A_2 , puis A_3 , donne le rectangle $A'_2A_{21}A_{22}A_{23}$ (en rouge) et le triplet (21, 20, 29), puis le rectangle $A'_3A_{31}A_{32}A_{33}$ (en noir) et le triplet (15, 8, 17). On a alors obtenu les trois premières branches de l'arbre de Berggren.

Chaque nouveau rectangle donne trois points supplémentaires et donc trois nouveaux rectangles et triplets, ce qui produit au total les 9 triplets pythagoriciens de niveau 2 de l'arbre de Berggren, etc.

Pour une démonstration de cette incroyable construction de tous les triplets pythagoriciens primitifs, voir l'article d'André Stoll cité en bibliographie.



COLORIAGE DES ENTIERS

5

Les jeux de coloriage peuvent être pratiqués de toutes sortes de façons... et en particulier avec les triplets pythagoriciens où ils ont suggéré un problème résolu récemment.

Le jeu consiste à colorier les entiers 1, 2, 3, ... en rouge ou en bleu de telle façon que les entiers d'un même triplet pythagoricien ne soient jamais tous de la même couleur. Le but est bien sûr de colorier les entiers aussi loin que possible.

En 2008, en utilisant des programmes, Joshua Cooper et Chris Poirer ont pu colorier les entiers jusqu'à 1 344. Le record a été battu en 2012 par William Kay, qui a colorié les entiers jusqu'à 1 514, puis en 2015 par Joshua Cooper et Ralph Overstreet, qui ont atteint l'entier 7 664.

La question était : ces progrès ont-ils une limite ? En 2016, Marijn Heule, Oliver Kullmann et Victor Marek ont su aller jusqu'à 7 824, mais surtout, ils ont réussi à démontrer qu'on ne ferait jamais mieux : au-delà de 7 824, de tels coloriages n'existent pas.

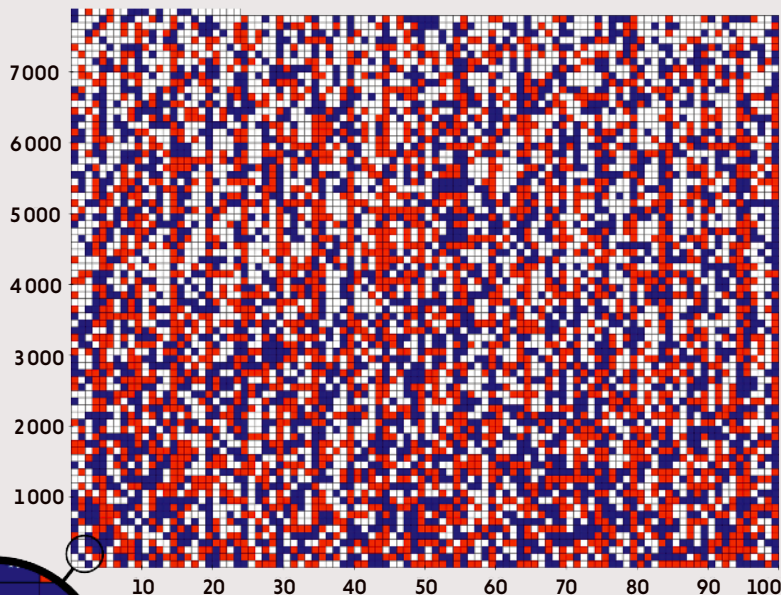
Dans le dessin ci-dessous, la solution pour 7 824 est

représentée. Les carrés laissés en blanc peuvent être colorés en rouge ou en bleu sans que cela contredise l'objectif recherché ; le dessin représente donc un grand nombre de solutions pour 7 824.

On peut faire quelques contrôles : les entiers 4 et 5 sont de couleurs différentes, donc le triplet (3, 4, 5) ne sera pas monochrome quelle que soit la couleur qu'on donnera à 3. Même chose pour (6, 8, 10), et ainsi de suite.

La preuve que les entiers jusqu'à 7 825 ne peuvent pas être coloriés pour satisfaire la contrainte du problème a nécessité un calcul énorme équivalent à 35 000 heures de calcul pour un ordinateur usuel, calcul bien évidemment effectué en parallèle (sinon, il aurait exigé quatre ans).

Une variante du problème existe : on cherche cette fois un coloriage à 3 couleurs et on exige que chaque triplet pythagoricien comporte au moins 2 couleurs. On sait qu'on peut colorier jusqu'à 11 066, mais on ignore si l'on peut aller plus loin, ni même s'il est possible de colorier l'infini des entiers.



301	302	303	304
201	202	203	204
101	102	103	104
1	2	3	4

> qualifiés aujourd'hui de pythagoriciens. Aucune réponse définitive ne semble possible.

D'une part, il y a une difficulté due à la tablette babylonienne en argile notée Plimpton 322, gravée en caractères cunéiformes et datée d'environ 1800 avant notre ère. Bien qu'incomplète, elle semble présenter une liste de triplets pythagoriciens. Mais les spécialistes ne sont pas tous d'accord et d'autres interprétations de la tablette ont été proposées. On ne peut donc pas affirmer avec certitude que les Babyloniens aient précédé Pythagore.

D'autre part, il existe un texte indien, le «Baudhāyana Sulba Sūtra», rédigé entre 800 et 400 avant notre ère, qui énonce ce que nous nommons le théorème de Pythagore et qui donne la liste de triplets pythagoriciens (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37). Étant donné l'imprécision de la date de rédaction du texte, il est impossible, là encore, de savoir si Pythagore a été devancé.

On ignore donc si le théorème de Pythagore et les triplets associés sont dus à l'école pythagoricienne. L'origine des premières notions mathématiques est délicate à retracer !

APRÈS PYTHAGORE

Toujours selon Proclus, les triplets pythagoriciens ont aussi intéressé Platon (427 à 347 avant notre ère) qui connaissait une seconde famille infinie de triplets pythagoriciens, celle donnée par la formule $(n^2 - 1, 2n, n^2 + 1)$. Comme celle de Pythagore, cette famille infinie ne donne que partiellement l'ensemble des triplets primitifs.

C'est Euclide qui mentionne la première famille complète permettant d'obtenir tous les triplets pythagoriciens primitifs. La famille dépend de deux paramètres, des entiers positifs m et n avec $m > n$, et s'écrit $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. Cette formule donne tous les triplets primitifs, mais pas uniquement. Le triplet est primitif si m et n ne sont pas tous les deux impairs et s'ils n'ont pas de diviseur commun supérieur à 1 (pour une démonstration, voir : https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple).

Si l'on veut une formule qui donne tous les triplets pythagoriciens sans exception, on introduit un troisième paramètre entier k et la famille devient $(k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2))$.

Il y a beaucoup de triplets pythagoriciens primitifs. En se limitant à ceux dont tous les éléments sont inférieurs à 100, on en trouve 16 : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (12, 35, 37), (9, 40, 41), (28, 45, 53), (11, 60, 61), (16, 63, 65), (33, 56, 65), (48, 55, 73), (13, 84, 85), (36, 77, 85), (39, 80, 89), (65, 72, 97).

Depuis plus de deux millénaires, on étudie les propriétés de cette famille infinie. Voici quelques affirmations prouvées la concernant.