

COLORIAGE DES ENTIERS

5

Les jeux de coloriage peuvent être pratiqués de toutes sortes de façons... et en particulier avec les triplets pythagoriciens où ils ont suggéré un problème résolu récemment.

Le jeu consiste à colorier les entiers 1, 2, 3, ... en rouge ou en bleu de telle façon que les entiers d'un même triplet pythagoricien ne soient jamais tous de la même couleur. Le but est bien sûr de colorier les entiers aussi loin que possible.

En 2008, en utilisant des programmes, Joshua Cooper et Chris Poirer ont pu colorier les entiers jusqu'à 1 344. Le record a été battu en 2012 par William Kay, qui a colorié les entiers jusqu'à 1 514, puis en 2015 par Joshua Cooper et Ralph Overstreet, qui ont atteint l'entier 7 664.

La question était : ces progrès ont-ils une limite ? En 2016, Marijn Heule, Oliver Kullmann et Victor Marek ont su aller jusqu'à 7 824, mais surtout, ils ont réussi à démontrer qu'on ne ferait jamais mieux : au-delà de 7 824, de tels coloriages n'existent pas.

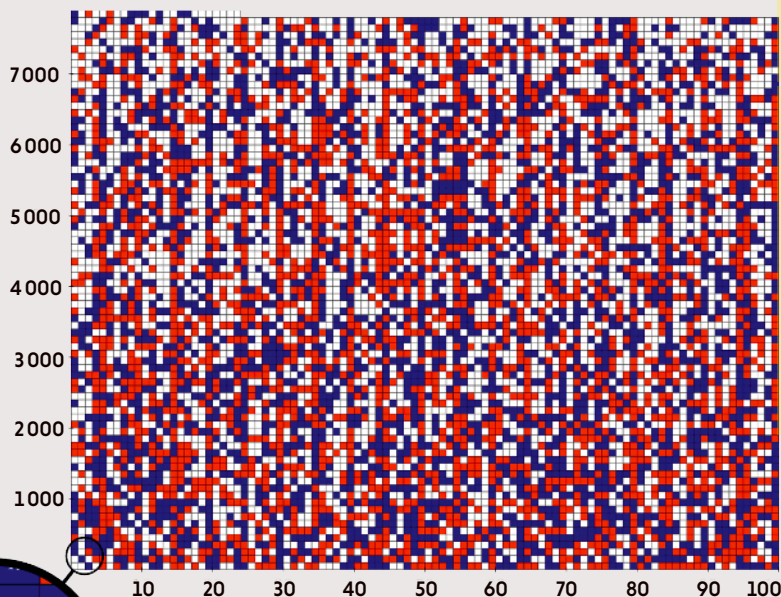
Dans le dessin ci-dessous, la solution pour 7 824 est

représentée. Les carrés laissés en blanc peuvent être colorés en rouge ou en bleu sans que cela contredise l'objectif recherché ; le dessin représente donc un grand nombre de solutions pour 7 824.

On peut faire quelques contrôles : les entiers 4 et 5 sont de couleurs différentes, donc le triplet (3, 4, 5) ne sera pas monochrome quelle que soit la couleur qu'on donnera à 3. Même chose pour (6, 8, 10), et ainsi de suite.

La preuve que les entiers jusqu'à 7 825 ne peuvent pas être coloriés pour satisfaire la contrainte du problème a nécessité un calcul énorme équivalent à 35 000 heures de calcul pour un ordinateur usuel, calcul bien évidemment effectué en parallèle (sinon, il aurait exigé quatre ans).

Une variante du problème existe : on cherche cette fois un coloriage à 3 couleurs et on exige que chaque triplet pythagoricien comporte au moins 2 couleurs. On sait qu'on peut colorier jusqu'à 11 066, mais on ignore si l'on peut aller plus loin, ni même s'il est possible de colorier l'infini des entiers.



301	302	303	304
201	202	203	204
101	102	103	104
1	2	3	4

> qualifiés aujourd'hui de pythagoriciens. Aucune réponse définitive ne semble possible.

D'une part, il y a une difficulté due à la tablette babylonienne en argile notée Plimpton 322, gravée en caractères cunéiformes et datée d'environ 1800 avant notre ère. Bien qu'incomplète, elle semble présenter une liste de triplets pythagoriciens. Mais les spécialistes ne sont pas tous d'accord et d'autres interprétations de la tablette ont été proposées. On ne peut donc pas affirmer avec certitude que les Babyloniens aient précédé Pythagore.

D'autre part, il existe un texte indien, le «Baudhāyana Sulba Sūtra», rédigé entre 800 et 400 avant notre ère, qui énonce ce que nous nommons le théorème de Pythagore et qui donne la liste de triplets pythagoriciens (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37). Étant donné l'imprécision de la date de rédaction du texte, il est impossible, là encore, de savoir si Pythagore a été devancé.

On ignore donc si le théorème de Pythagore et les triplets associés sont dus à l'école pythagoricienne. L'origine des premières notions mathématiques est délicate à retracer !

APRÈS PYTHAGORE

Toujours selon Proclus, les triplets pythagoriciens ont aussi intéressé Platon (427 à 347 avant notre ère) qui connaissait une seconde famille infinie de triplets pythagoriciens, celle donnée par la formule $(n^2 - 1, 2n, n^2 + 1)$. Comme celle de Pythagore, cette famille infinie ne donne que partiellement l'ensemble des triplets primitifs.

C'est Euclide qui mentionne la première famille complète permettant d'obtenir tous les triplets pythagoriciens primitifs. La famille dépend de deux paramètres, des entiers positifs m et n avec $m > n$, et s'écrit $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. Cette formule donne tous les triplets primitifs, mais pas uniquement. Le triplet est primitif si m et n ne sont pas tous les deux impairs et s'ils n'ont pas de diviseur commun supérieur à 1 (pour une démonstration, voir : https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple).

Si l'on veut une formule qui donne tous les triplets pythagoriciens sans exception, on introduit un troisième paramètre entier k et la famille devient $(k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2))$.

Il y a beaucoup de triplets pythagoriciens primitifs. En se limitant à ceux dont tous les éléments sont inférieurs à 100, on en trouve 16 : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (12, 35, 37), (9, 40, 41), (28, 45, 53), (11, 60, 61), (16, 63, 65), (33, 56, 65), (48, 55, 73), (13, 84, 85), (36, 77, 85), (39, 80, 89), (65, 72, 97).

Depuis plus de deux millénaires, on étudie les propriétés de cette famille infinie. Voici quelques affirmations prouvées la concernant.