

Leur démonstration constitue une collection d'exercices dont certains sont difficiles.

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien primitif, avec $a < b < c$. On a alors :

- Un entier parmi a et b est impair et c est impair.

- L'entier $(c-a)(c-b)/2$ est toujours un carré. Par exemple, $(13-5)(13-12)/2=4=2^2$ et $(85-13)(85-84)/2=36=6^2$.

- Au plus un des trois entiers a , b ou c est un carré.

- Un entier exactement parmi a et b est multiple de 3.

- Un entier exactement parmi a et b est multiple de 4.

- Un entier exactement parmi a , b et c est multiple de 5.

- Tous les facteurs premiers de c sont de la forme $4k+1$ avec k entier, et c lui-même est donc de la forme $4k+1$ avec k entier.

- Pierre de Fermat démontra que l'aire du triangle associé à un triplet pythagoricien, $ab/2$, n'est jamais un carré ni le double d'un carré (<https://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html>).

- Aucun des angles aigus (mesurés en degrés) d'un triangle correspondant à un triplet pythagoricien n'est un nombre rationnel.

- Tout entier à partir de 3 se retrouve dans un triplet pythagoricien au moins (primitif ou non).

- Tout entier à partir de 3 qui n'est pas de la forme $4k+1$ se retrouve dans un triplet pythagoricien primitif.

- Derrick Norman Lehmer montra en 1900 un étrange résultat : si l'on note $N(k)$ le nombre de triplets pythagoriciens primitifs dont la somme (le périmètre du triangle associé) est inférieure à k , alors le rapport $N(k)/k$ tend vers $\log(2)/\pi^2$ quand k tend vers l'infini.

- Si f_n est le n -ième nombre de Fibonacci ($f_0=f_1=1$ et $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$), alors le triplet $(f_n f_{n+3}, 2f_{n+1} f_{n+2}, f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)$ est pythagoricien.

- ab est toujours multiple de 12, et abc multiple de 60 (<https://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html>).

- Certains triplets pythagoriciens primitifs donnent des triangles rectangles ayant la même aire. Les deux plus petits sont (20, 21, 29) et (12, 35, 37). On connaît un trio de triplets pythagoriciens donnant des triangles de même aire : (4485, 5852, 7373), (3059, 8580, 9109), (1380, 19019, 19069).

- Un magnifique résultat démontré en 1934 par le Suédois B. Berggren invoque des transformations A, B et C qui ne manquent rien, sans répétitions (voir l'encadré 4) : tout triplet pythagoricien primitif s'écrit de façon unique sous la forme d'une suite finie de A, B ou C appliquée à (3, 4, 5). Par exemple, ABC(3, 4, 5) donne (115, 262, 277) et AABBC(3, 4, 5) donne (2299, 7140, 7501).

La popularité des triplets pythagoriciens a amené un problème de coloriage et une compétition de calcul. L'idée vient de Paul Erdős et Ronald Graham. Ce dernier offre d'ailleurs 250 dollars à celui qui résoudra le problème.

COLORIAGES PYTHAGORIENS

La question est la suivante : peut-on séparer l'ensemble des entiers en un nombre fini k de sous-ensembles $S_1, S_2, \dots, S_k$ de façon qu'aucun S_i ne contienne trois nombres d'un même triplet pythagoricien ?

On peut par exemple tenter de séparer les entiers en deux sous-ensembles : $S_1 =$ l'ensemble P des nombres pairs et $S_2 =$ l'ensemble I des nombres impairs. Cela ne convient pas, car le triplet (6, 8, 10) serait tout entier dans P. Si la réponse est non à la question d'Erdős et Ronald Graham, il faut une séparation des entiers en une infinité de sous-ensembles pour éviter tout triplet. Si la réponse est oui, il faut indiquer le plus petit entier k permettant la séparation.

Savoir si la réponse au problème est le nombre $k=2$ revient à rechercher un coloriage en deux couleurs des nombres entiers en évitant que les trois éléments d'un même triplet pythagoricien soient de la même couleur. On peut essayer progressivement en allant jusqu'à un certain entier maximum. Le coloriage suivant des entiers de 1 à 20 est correct : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

En 2008, à l'aide de programmes puissants, un tel coloriage a été obtenu jusqu'à l'entier 1344, puis en 2012 jusqu'à 1514, puis en 2015 jusqu'à 7664. Enfin, en 2016, on a pu aller jusqu'à 7824. Ce résultat de Marijn Heule, Oliver Kullmann et Victor Marek est un maximum, car ces chercheurs ont aussi montré qu'un coloriage à deux couleurs ne pouvait pas exister pour les entiers jusqu'à 7825. Pour séparer les entiers en sous-ensembles sans triplets pythagoriciens, il faut donc au moins trois sous-ensembles.

Un risque d'erreur dans les opérations menées pour obtenir le résultat provenait de la conversion de l'énoncé du problème en une formule de logique pure. En 2019, une vérification de cette conversion a été proposée par Luís Cruz-Filipe, Joao Marques-Silva, Peter Schneider-Kamp. La méthode a mis en œuvre l'assistant de preuves Coq conçu à l'Inria, en France : l'informatique aide à trouver des solutions à des conjectures et permet de consolider les résultats en procédant à des contrôles *a posteriori* garantissant au mieux les résultats. La conjecture qu'un partage en trois est possible reste aujourd'hui non résolue.

L'histoire n'est pas finie : on a proposé des applications des triplets pythagoriciens pour engendrer des suites pseudo-aléatoires, pour mener des opérations de partage de clés en cryptographie et pour configurer des systèmes quantiques ! ■

BIBLIOGRAPHIE

L. Cruz-Filipe et al., **Formally verifying the solution to the Boolean Pythagorean triples problem**, *Journal of Automated Reasoning*, vol. 63(3), pp. 695-722, 2019.

S. Eliahou et J. Fromentin, **Pythagore et mixité**, *Images des Mathématiques*, 2017 : <https://images.math.cnrs.fr/Pythagore-et-mixite.html>

M. Heule et al., **Solving and verifying the Boolean Pythagorean triples problem via cube-and-conquer**, *International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, Springer, 2016 (<https://arxiv.org/pdf/1605.00723.pdf>).

E. Maor, **The Pythagorean Theorem : A 4,000-Year History**, Princeton University Press, 2007.

A. Stoll, **Génération géométrique et algébrique des triplets pythagoriciens**, *L'Ouvret*, vol. 100, pp. 1-8, 2000 (<http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST00012/IST00012.pdf>).

B. Berggren, **Pythagoreiska triangelar**, *Elementa : Tidskrift för Elementär Matematik*, vol. 17, pp. 129-139, 1934.

Un remarquable petit film : <https://www.3blue1brown.com/videos-blog/2017/5/26/all-possible-pythagorean-triples-visualized>