

Leur démonstration constitue une collection d'exercices dont certains sont difficiles.

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien primitif, avec $a < b < c$. On a alors :

- Un entier parmi a et b est impair et c est impair.

- L'entier $(c-a)(c-b)/2$ est toujours un carré. Par exemple, $(13-5)(13-12)/2=4=2^2$ et $(85-13)(85-84)/2=36=6^2$.

- Au plus un des trois entiers a , b ou c est un carré.

- Un entier exactement parmi a et b est multiple de 3.

- Un entier exactement parmi a et b est multiple de 4.

- Un entier exactement parmi a , b et c est multiple de 5.

- Tous les facteurs premiers de c sont de la forme $4k+1$ avec k entier, et c lui-même est donc de la forme $4k+1$ avec k entier.

- Pierre de Fermat démontra que l'aire du triangle associé à un triplet pythagoricien, $ab/2$, n'est jamais un carré ni le double d'un carré (<https://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html>).

- Aucun des angles aigus (mesurés en degrés) d'un triangle correspondant à un triplet pythagoricien n'est un nombre rationnel.

- Tout entier à partir de 3 se retrouve dans un triplet pythagoricien au moins (primitif ou non).

- Tout entier à partir de 3 qui n'est pas de la forme $4k+1$ se retrouve dans un triplet pythagoricien primitif.

- Derrick Norman Lehmer montra en 1900 un étrange résultat : si l'on note $N(k)$ le nombre de triplets pythagoriciens primitifs dont la somme (le périmètre du triangle associé) est inférieure à k , alors le rapport $N(k)/k$ tend vers $\log(2)/\pi^2$ quand k tend vers l'infini.

- Si f_n est le n -ième nombre de Fibonacci ($f_0=f_1=1$ et $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$), alors le triplet $(f_n f_{n+3}, 2f_{n+1} f_{n+2}, f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)$ est pythagoricien.

- ab est toujours multiple de 12, et abc multiple de 60 (<https://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html>).

- Certains triplets pythagoriciens primitifs donnent des triangles rectangles ayant la même aire. Les deux plus petits sont $(20, 21, 29)$ et $(12, 35, 37)$. On connaît un trio de triplets pythagoriciens donnant des triangles de même aire : $(4485, 5852, 7373)$, $(3059, 8580, 9109)$, $(1380, 19019, 19069)$.

- Un magnifique résultat démontré en 1934 par le Suédois B. Berggren invoque des transformations A, B et C qui ne manquent rien, sans répétitions (voir l'encadré 4) : tout triplet pythagoricien primitif s'écrit de façon unique sous la forme d'une suite finie de A, B ou C appliquée à $(3, 4, 5)$. Par exemple, ABC(3, 4, 5) donne $(115, 262, 277)$ et AABCC(3, 4, 5) donne $(2299, 7140, 7501)$.

La popularité des triplets pythagoriciens a amené un problème de coloriage et une compétition de calcul. L'idée vient de Paul Erdős et Ronald Graham. Ce dernier offre d'ailleurs 250 dollars à celui qui résoudra le problème.

COLORIAGES PYTHAGORIENS

La question est la suivante : peut-on séparer l'ensemble des entiers en un nombre fini k de sous-ensembles $S_1, S_2, \dots, S_k$ de façon qu'aucun S_i ne contienne trois nombres d'un même triplet pythagoricien ?

On peut par exemple tenter de séparer les entiers en deux sous-ensembles : $S_1 =$ l'ensemble P des nombres pairs et $S_2 =$ l'ensemble I des nombres impairs. Cela ne convient pas, car le triplet $(6, 8, 10)$ serait tout entier dans P. Si la réponse est non à la question d'Erdős et Ronald Graham, il faut une séparation des entiers en une infinité de sous-ensembles pour éviter tout triplet. Si la réponse est oui, il faut indiquer le plus petit entier k permettant la séparation.

Savoir si la réponse au problème est le nombre $k=2$ revient à rechercher un coloriage en deux couleurs des nombres entiers en évitant que les trois éléments d'un même triplet pythagoricien soient de la même couleur. On peut essayer progressivement en allant jusqu'à un certain entier maximum. Le coloriage suivant des entiers de 1 à 20 est correct : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

En 2008, à l'aide de programmes puissants, un tel coloriage a été obtenu jusqu'à l'entier 1344, puis en 2012 jusqu'à 1514, puis en 2015 jusqu'à 7664. Enfin, en 2016, on a pu aller jusqu'à 7824. Ce résultat de Marijn Heule, Oliver Kullmann et Victor Marek est un maximum, car ces chercheurs ont aussi montré qu'un coloriage à deux couleurs ne pouvait pas exister pour les entiers jusqu'à 7825. Pour séparer les entiers en sous-ensembles sans triplets pythagoriciens, il faut donc au moins trois sous-ensembles.

Un risque d'erreur dans les opérations menées pour obtenir le résultat provenait de la conversion de l'énoncé du problème en une formule de logique pure. En 2019, une vérification de cette conversion a été proposée par Luís Cruz-Filipe, Joao Marques-Silva, Peter Schneider-Kamp. La méthode a mis en œuvre l'assistant de preuves Coq conçu à l'Inria, en France : l'informatique aide à trouver des solutions à des conjectures et permet de consolider les résultats en procédant à des contrôles *a posteriori* garantissant au mieux les résultats. La conjecture qu'un partage en trois est possible reste aujourd'hui non résolue.

L'histoire n'est pas finie : on a proposé des applications des triplets pythagoriciens pour engendrer des suites pseudo-aléatoires, pour mener des opérations de partage de clés en cryptographie et pour configurer des systèmes quantiques ! ■

BIBLIOGRAPHIE

L. Cruz-Filipe et al., **Formally verifying the solution to the Boolean Pythagorean triples problem**, *Journal of Automated Reasoning*, vol. 63(3), pp. 695-722, 2019.

S. Eliahou et J. Fromentin, **Pythagore et mixité**, *Images des Mathématiques*, 2017 : <https://images.math.cnrs.fr/Pythagore-et-mixite.html>

M. Heule et al., **Solving and verifying the Boolean Pythagorean triples problem via cube-and-conquer**, *International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, Springer, 2016 (<https://arxiv.org/pdf/1605.00723.pdf>).

E. Maor, **The Pythagorean Theorem : A 4,000-Year History**, Princeton University Press, 2007.

A. Stoll, **Génération géométrique et algébrique des triplets pythagoriciens**, *L'Ouvrier*, vol. 100, pp. 1-8, 2000 (<http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST00012/IST00012.pdf>).

B. Berggren, **Pythagoreiska triangelar**, *Elementa : Tidskrift för Elementär Matematik*, vol. 17, pp. 129-139, 1934.

Un remarquable petit film : <https://www.3blue1brown.com/videos-blog/2017/5/26/all-possible-pythagorean-triples-visualized>

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

UNE MÉTÉORITE DANS L'ŒIL

Paul Duncombe a entrepris l'étude géologique, zoologique, anthropologique... et artistique de la reconquête par la nature de l'«Œil du Québec», un cratère d'impact vieux de plus de 200 millions d'années.

D

es canards sur la place de la Comédie-Française, à Paris, un puma dans les rues de Santiago, au Chili, deux rorquals près des côtes de Marseille... Pendant les mois de confinement que nous venons de passer, la nature a semble-t-il repris sinon ses droits au moins quelques libertés, profitant de l'absence de perturbation d'origine humaine. Le scénario est connu : quand la pression humaine diminue, la nature renaît. C'est le cas dans la zone démilitarisée entre les deux Corées ou autour de Tchernobyl, en Ukraine. Parfois, il arrive qu'une catastrophe plus radicale encore, comme une éruption volcanique, remette les compteurs à zéro, laissant à nu un territoire que la nature va là aussi progressivement reconquérir : une aubaine pour les spécialistes de

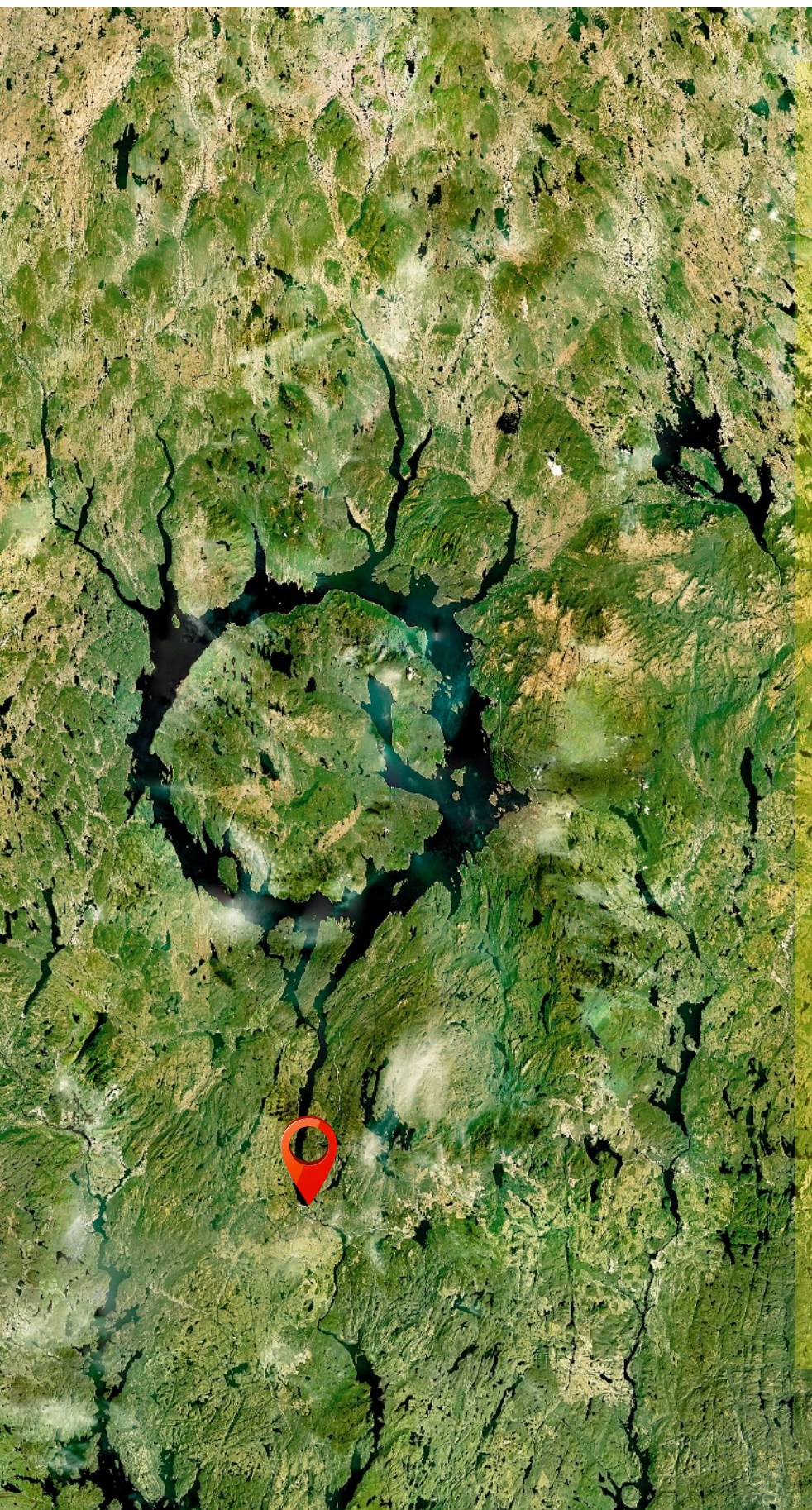
la biodiversité cherchant à comprendre les interactions en jeu dans les écosystèmes. Et quand la catastrophe en question est la chute d'une grosse météorite ?

C'est l'objet du projet intitulé «Manicouagan», de l'artiste français Paul Duncombe, qui vient de recevoir le prix décerné par l'association Coal, fondée en 2008 par des professionnels de l'art contemporain, de l'écologie et de la recherche. Cette année, à l'occasion du Congrès mondial de la nature de l'UICN 2020, qui devait avoir lieu du 11 au 19 juin à Marseille et est désormais reporté à janvier 2021, l'édition avait pour thème l'érosion de la biodiversité.

Manicouagan ? C'est le nom d'un cratère d'impact laissé par une météorite de 8 kilomètres de diamètre, tombée sur ce qui est aujourd'hui le Canada il y a quelque 214 millions d'années avec une vitesse estimée entre 17 et 30 kilomètres par seconde. Le choc aurait liquéfié la roche sur 9000 mètres de profondeur ! La proximité temporelle de l'événement avec l'extinction du Trias-Jurassique plaide pour un possible lien de cause à effet. D'autant que plusieurs phénomènes du même type semblent

Le cratère de Manicouagan, ou «Œil du Québec», et en particulier le barrage Daniel-Johnson, vus de l'espace.





contemporains, comme la formation du cratère de Rochechouart-Chassenon, entre les départements français de la Charente et de la Vienne. Certains spécialistes parlent de *catena*, un alignement d'impacts météoritiques consécutifs à la dislocation d'un astéroïde.

On fait difficilement mieux qu'une des six grandes extinctions de masse que la Terre a connues comme remise à zéro de la nature ! Le cratère de Manicouagan, ou plutôt ce qu'il en reste, c'est-à-dire l'astrolème, est aujourd'hui rempli d'eau à la suite de l'édification du barrage Daniel-Johnson. Au centre, le mont Babel, de 952 mètres de hauteur, marque le centre du choc météoritique. Vue du ciel, l'étendue d'eau a une forme circulaire qui lui vaut le surnom d'« Œil du Québec ». Aujourd'hui, toute la région est une réserve où la biodiversité est protégée.

C'est là que Paul Duncombe, accompagné de scientifiques et d'artistes notamment innus (un peuple autochtone de la péninsule du Labrador), s'est installé dans la station Uapishka aux abords du cratère de Manicouagan afin d'enquêter sur les singularités géographiques, géologiques, zoologiques, botaniques, anthropologiques... du terrain, grâce entre autres à la réalisation de scans tridimensionnels de zones remarquables, de prélèvements d'échantillons, de relevés d'empreintes animales. L'idée est d'explorer l'ensemble des mécanismes ayant conduit à la reconquête du site après l'impact (la roche aurait mis de 1600 à 5000 ans pour refroidir complètement) par les végétaux, les insectes et autres espèces vivantes et ce, jusqu'aux premières cultures autochtones et l'engloutissement artificiel des vastes forêts du territoire par les eaux. L'ensemble de l'expédition et de ses conclusions fera l'objet d'installations artistiques présentées au Canada et en France.

Paul Duncombe, qui réfléchit depuis longtemps aux crises écologiques majeures, à commencer par celle que nous traversons, s'est déjà illustré sur le terrain de la reconquête de la nature. De fait, plusieurs de ses œuvres mettent en scène la colonisation de vestiges (une Citroën 2CV, un banc public arraché, un arbre déraciné...) par la faune et la flore. Cette fois, les échelles spatiales et temporelles sont d'un tout autre ordre. ■

Le site internet du projet :
<http://www.projetcoal.org/coal/>



L'auteur a publié :
**Pollock, Turner, Van Gogh,
Vermeer... et la science**
(Belin, 2018)