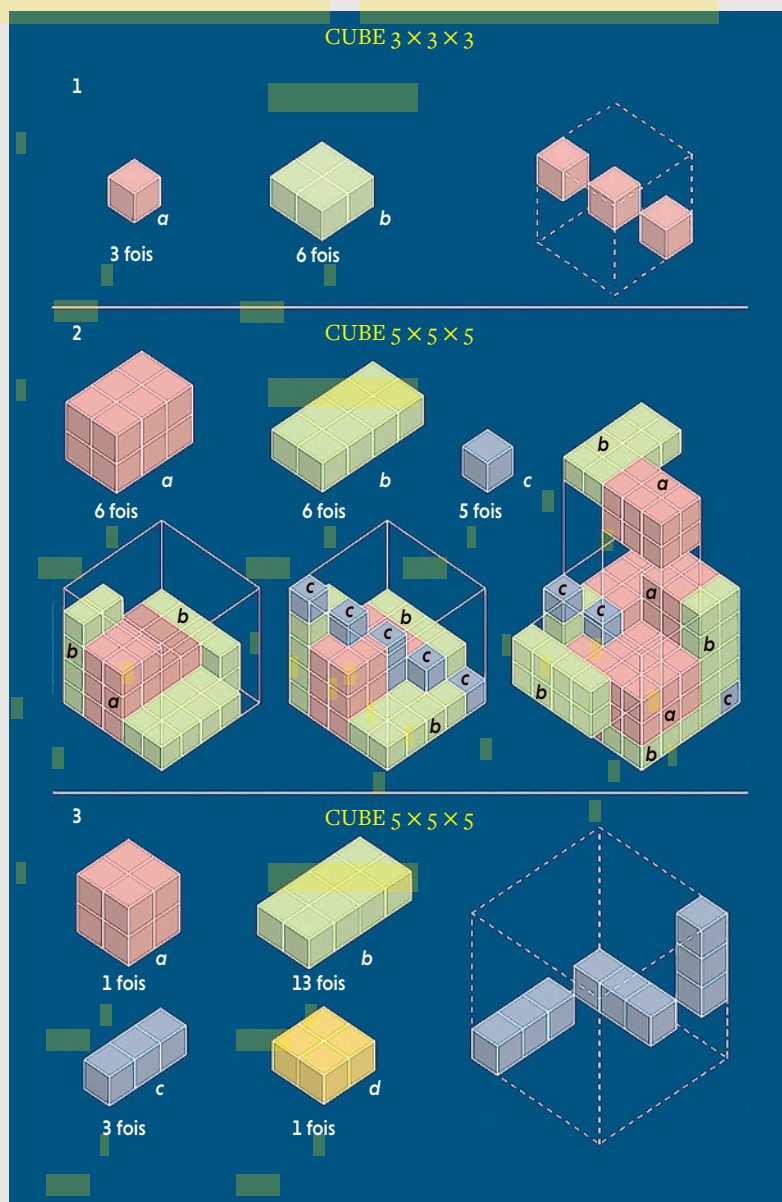


2

RANGEMENTS DE PAVÉS DANS UN CUBE

John Conway a imaginé des casse-tête de rangement qui sont à la fois élégants, car n'utilisant que peu de pièces différentes, et assez difficiles... sauf si l'on accepte de raisonner (voir le raisonnement pour le casse-tête 1 dans le texte de l'article). Pour le casse-tête 2, la solution est indiquée en vue éclatée ; pour achever

la construction, il suffit de descendre les structures supérieures puis de placer la plaque verte b au-dessus de la plaque rose a. Le raisonnement sur la parité nous oblige à placer les cubes unités le long de la diagonale. Pour le casse-tête 3, seul le début de la solution est indiqué.



> C'est donc que le carré initial de côté m n'était pas le plus petit possible permettant l'égalité géométrique. On a une contradiction et donc l'hypothèse de départ est fausse (raisonnement par l'absurde): $\sqrt{2}$ n'est pas un quotient de deux entiers, c'est donc un nombre irrationnel. En transposant, vous pouvez démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel (figure C).

TROIS CASSE-TÊTE DE REMPLISSAGE D'UNE BOÎTE CUBIQUE

Il existe une multitude de casse-tête consistant à ranger dans une boîte, en général un parallélépipède rectangle, des pièces en petit nombre, par exemple 10, qui, elles aussi, sont des parallélépipèdes rectangles. Par tâtonnements, on finit par trouver la solution. Sur un tel sujet, à moins de multiplier les pièces et la variété de leurs formes, il est difficile d'arriver à un problème difficile. De plus, même s'il est amusant de manipuler les pièces jusqu'à arriver à la solution, seuls de petits raisonnements sur la forme des pièces entrent en jeu et ils limitent assez peu le temps de recherche.

John Conway a changé cette situation en imaginant trois casse-tête où, en l'absence de raisonnement, vous risquez de tourner en rond sans jamais réussir à remplir la boîte, alors qu'en menant des considérations astucieuses et ordonnées, vous serez rapidement conduit à la solution.

Le plus simple des trois casse-tête consiste à remplir un cube $3 \times 3 \times 3$, avec trois cubes $1 \times 1 \times 1$ et six parallélépipèdes $1 \times 2 \times 2$.

Le raisonnement consiste à prendre en compte la parité. Le cube $3 \times 3 \times 3$ est composé de trois couches horizontales de forme $3 \times 3 \times 1$, donc chacune de volume 9. On peut aussi décomposer le cube $3 \times 3 \times 3$ en trois parallélépipèdes verticaux $3 \times 3 \times 1$, chacun parallèle à une face verticale du cube. En considérant la face verticale perpendiculaire, on a une troisième décomposition du cube en trois parallélépipèdes $3 \times 3 \times 1$.

Examinons ces neuf parallélépipèdes. Quand on positionne une forme $1 \times 2 \times 2$ dans le cube, elle ne peut occuper qu'un nombre pair de cubes d'un de ces neuf parallélépipèdes $3 \times 3 \times 1$. Il faut donc que chacun d'eux contienne un des petits cubes $1 \times 1 \times 1$, et un seul (sinon, il en faudrait trois dans un même parallélépipède $3 \times 3 \times 1$, ce qui empêcherait d'en mettre dans les deux qui sont parallèles). La face supérieure du cube doit donc contenir un carré $1 \times 1 \times 1$. Si on le place au centre de la face, on tombe rapidement sur une impasse: l'obligation de placer un autre petit cube juste en dessous, ce qui en placerait deux dans un même paquet $3 \times 3 \times 1$. Si on place le petit cube de la face supérieure au milieu d'un côté, on arrive aussi immédiatement à une impasse. Il