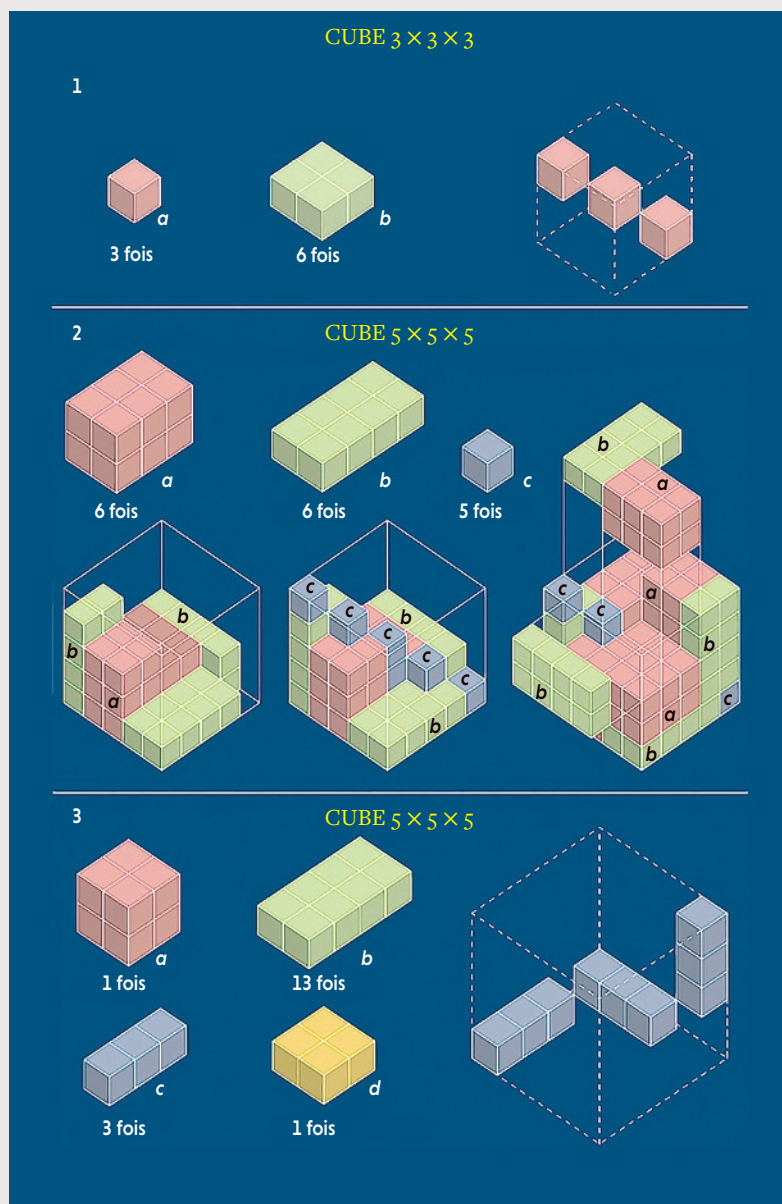


2

RANGEMENTS DE PAVÉS DANS UN CUBE

John Conway a imaginé des casse-tête de rangement qui sont à la fois élégants, car n'utilisant que peu de pièces différentes, et assez difficiles... sauf si l'on accepte de raisonner (voir le raisonnement pour le casse-tête 1 dans le texte de l'article). Pour le casse-tête 2, la solution est indiquée en vue éclatée ; pour achever

la construction, il suffit de descendre les structures supérieures puis de placer la plaque verte b au-dessus de la plaque rose a. Le raisonnement sur la parité nous oblige à placer les cubes unités le long de la diagonale. Pour le casse-tête 3, seul le début de la solution est indiqué.



> C'est donc que le carré initial de côté m n'était pas le plus petit possible permettant l'égalité géométrique. On a une contradiction et donc l'hypothèse de départ est fausse (raisonnement par l'absurde): $\sqrt{2}$ n'est pas un quotient de deux entiers, c'est donc un nombre irrationnel. En transposant, vous pouvez démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel (figure C).

TROIS CASSE-TÊTE DE REMPLISSAGE D'UNE BOÎTE CUBIQUE

Il existe une multitude de casse-tête consistant à ranger dans une boîte, en général un parallélépipède rectangle, des pièces en petit nombre, par exemple 10, qui, elles aussi, sont des parallélépipèdes rectangles. Par tâtonnements, on finit par trouver la solution. Sur un tel sujet, à moins de multiplier les pièces et la variété de leurs formes, il est difficile d'arriver à un problème difficile. De plus, même s'il est amusant de manipuler les pièces jusqu'à arriver à la solution, seuls de petits raisonnements sur la forme des pièces entrent en jeu et ils limitent assez peu le temps de recherche.

John Conway a changé cette situation en imaginant trois casse-tête où, en l'absence de raisonnement, vous risquez de tourner en rond sans jamais réussir à remplir la boîte, alors qu'en menant des considérations astucieuses et ordonnées, vous serez rapidement conduit à la solution.

Le plus simple des trois casse-tête consiste à remplir un cube $3 \times 3 \times 3$, avec trois cubes $1 \times 1 \times 1$ et six parallélépipèdes $1 \times 2 \times 2$.

Le raisonnement consiste à prendre en compte la parité. Le cube $3 \times 3 \times 3$ est composé de trois couches horizontales de forme $3 \times 3 \times 1$, donc chacune de volume 9. On peut aussi décomposer le cube $3 \times 3 \times 3$ en trois parallélépipèdes verticaux $3 \times 3 \times 1$, chacun parallèle à une face verticale du cube. En considérant la face verticale perpendiculaire, on a une troisième décomposition du cube en trois parallélépipèdes $3 \times 3 \times 1$.

Examinons ces neuf parallélépipèdes. Quand on positionne une forme $1 \times 2 \times 2$ dans le cube, elle ne peut occuper qu'un nombre pair de cubes d'un de ces neuf parallélépipèdes $3 \times 3 \times 1$. Il faut donc que chacun d'eux contienne un des petits cubes $1 \times 1 \times 1$, et un seul (sinon, il en faudrait trois dans un même parallélépipède $3 \times 3 \times 1$, ce qui empêcherait d'en mettre dans les deux qui sont parallèles). La face supérieure du cube doit donc contenir un carré $1 \times 1 \times 1$. Si on le place au centre de la face, on tombe rapidement sur une impasse: l'obligation de placer un autre petit cube juste en dessous, ce qui en placerait deux dans un même paquet $3 \times 3 \times 1$. Si on place le petit cube de la face supérieure au milieu d'un côté, on arrive aussi immédiatement à une impasse. Il

faut donc placer le petit cube de la face supérieure dans un coin.

Il en va de même pour la face inférieure dans laquelle un petit cube doit être placé dans un coin, qui ne peut être que celui diamétralement opposé au petit cube de la face supérieure. Le troisième petit cube est alors nécessairement au centre. Le reste s'impose de proche en proche. Notons que ce raisonnement non seulement produit une solution, mais montre aussi qu'aux symétries près, il n'y en a qu'une seule.

Les deux autres puzzles de rangement de Conway sont illustrés dans l'encadré 2 avec des indications pour leur solution. Amusez-vous à trouver les raisonnements qui amènent droit vers le rangement complet.

LE PROBLÈME DES DEUX SORCIERS

Dans les années 1960, Conway a imaginé un incroyable problème qui, récemment encore, a donné lieu à des discussions et à la publication d'un article par Tanya Khovanova, du MIT (voir la bibliographie). En voici l'énoncé :

« Hier soir, j'étais assis derrière deux sorciers dans un bus et j'ai entendu ce qu'ils disaient :

A : J'ai un nombre entier d'enfants, dont les âges sont des entiers non nuls. La somme de ces âges est le numéro de ce bus, et leur produit est mon propre âge.

B : Comme c'est intéressant ! Peut-être que si vous me disiez votre âge et le nombre de vos enfants, je pourrais calculer chacun de leurs âges ?

A : NON.

B : Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez !

La question est : quel est le numéro du bus ? »

Précisons que dans le dialogue, le « non » du sorcier A ne signifie pas qu'il refuse de répondre, mais que la connaissance de son âge et du nombre de ses enfants ne permet pas de connaître individuellement leurs âges. Bien sûr, il faut prendre en compte que le sorcier B connaît le numéro du bus. Précisons encore que les sorciers peuvent être très jeunes ou très vieux : il n'y a aucune impossibilité à envisager que l'âge du sorcier A soit 2 ans ou 20 000 ans.

Voici la solution, que je n'ai pu comprendre et vérifier entièrement qu'en m'aidant d'un programme. Je ne peux pas recopier tous les calculs que nécessite la conclusion, mais vous pouvez croire ce que j'affirme ou... refaire tous les calculs omis.

Notons a l'âge du sorcier A, b le numéro du bus, c le nombre de ses enfants. Supposons par exemple que le numéro du bus soit $b=5$. Les diverses options sont :

• $c=5$ avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 1, 1 et donc $a=1$;



LES PAVAGES FINS

John Conway et Hallard Croft ont conçu des pavages du plan avec des segments de droite. La figure a indique comment on réalise un pavage avec des segments semi-ouverts $[A, B[$ (où le point A est inclus, et le point B est exclu). C'est facile, car, en les mettant bout à bout, on est ramené au pavage évident par des droites.

La figure b illustre la solution pour des segments de même taille fermés $[A, B]$ (où A et B appartiennent au segment). L'empilement 1 est placé en premier. L'empilement 2 est alors ajouté, mais, bien évidemment, le segment le plus à gauche de cette pile n'est pas retenu.

Pour l'empilement 3, on omet de prendre le segment le plus à droite. Pour les piles obliques qu'on ajoute et qui sont de plus en plus fines, à chaque fois le « premier » segment est omis.

La figure c montre une solution pour des segments ouverts $]A, B[$ (où A et B sont exclus), de tailles différentes. Les segments du carré central donnent un carré ouvert (ni les côtés ni les sommets du carré ne sont couverts par ce premier empilement). Chaque rectangle obtenu progressivement lors de l'ajout de nouvelles piles est lui aussi ouvert. Avec des segments ouverts de même longueur, il n'y a pas de solution.

