

faut donc placer le petit cube de la face supérieure dans un coin.

Il en va de même pour la face inférieure dans laquelle un petit cube doit être placé dans un coin, qui ne peut être que celui diamétralement opposé au petit cube de la face supérieure. Le troisième petit cube est alors nécessairement au centre. Le reste s'impose de proche en proche. Notons que ce raisonnement non seulement produit une solution, mais montre aussi qu'aux symétries près, il n'y en a qu'une seule.

Les deux autres puzzles de rangement de Conway sont illustrés dans l'encadré 2 avec des indications pour leur solution. Amusez-vous à trouver les raisonnements qui amènent droit vers le rangement complet.

LE PROBLÈME DES DEUX SORCIERS

Dans les années 1960, Conway a imaginé un incroyable problème qui, récemment encore, a donné lieu à des discussions et à la publication d'un article par Tanya Khovanova, du MIT (voir la bibliographie). En voici l'énoncé :

« Hier soir, j'étais assis derrière deux sorciers dans un bus et j'ai entendu ce qu'ils disaient :

A : J'ai un nombre entier d'enfants, dont les âges sont des entiers non nuls. La somme de ces âges est le numéro de ce bus, et leur produit est mon propre âge.

B : Comme c'est intéressant ! Peut-être que si vous me disiez votre âge et le nombre de vos enfants, je pourrais calculer chacun de leurs âges ?

A : NON.

B : Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez !

La question est : quel est le numéro du bus ? »

Précisons que dans le dialogue, le « non » du sorcier A ne signifie pas qu'il refuse de répondre, mais que la connaissance de son âge et du nombre de ses enfants ne permet pas de connaître individuellement leurs âges. Bien sûr, il faut prendre en compte que le sorcier B connaît le numéro du bus. Précisons encore que les sorciers peuvent être très jeunes ou très vieux : il n'y a aucune impossibilité à envisager que l'âge du sorcier A soit 2 ans ou 20 000 ans.

Voici la solution, que je n'ai pu comprendre et vérifier entièrement qu'en m'aidant d'un programme. Je ne peux pas recopier tous les calculs que nécessite la conclusion, mais vous pouvez croire ce que j'affirme ou... refaire tous les calculs omis.

Notons a l'âge du sorcier A, b le numéro du bus, c le nombre de ses enfants. Supposons par exemple que le numéro du bus soit $b=5$. Les diverses options sont :

• $c=5$ avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 1, 1 et donc $a=1$;

3

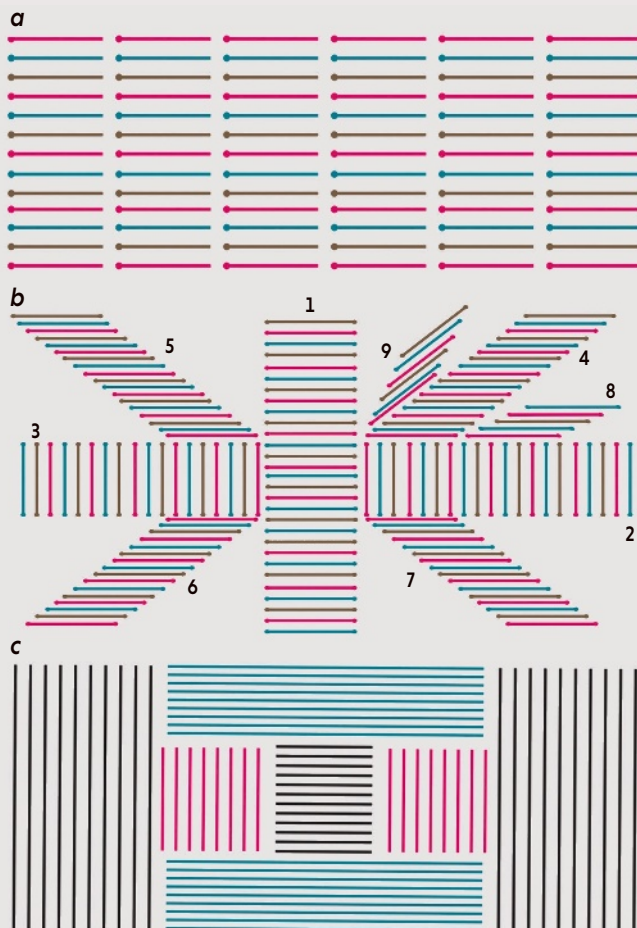
LES PAVAGES FINS

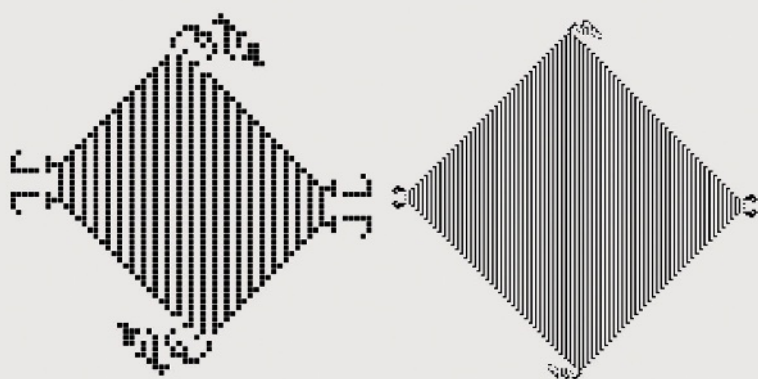
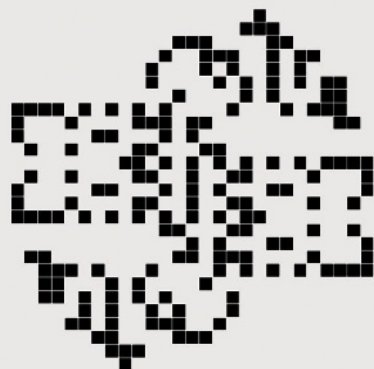
John Conway et Hallard Croft ont conçu des pavages du plan avec des segments de droite. La figure a indique comment on réalise un pavage avec des segments semi-ouverts $[A, B[$ (où le point A est inclus, et le point B est exclu). C'est facile, car, en les mettant bout à bout, on est ramené au pavage évident par des droites.

La figure b illustre la solution pour des segments de même taille fermés $[A, B]$ (où A et B appartiennent au segment). L'empilement 1 est placé en premier. L'empilement 2 est alors ajouté, mais, bien évidemment, le segment le plus à gauche de cette pile n'est pas retenu.

Pour l'empilement 3, on omet de prendre le segment le plus à droite. Pour les piles obliques qu'on ajoute et qui sont de plus en plus fines, à chaque fois le « premier » segment est omis.

La figure c montre une solution pour des segments ouverts $]A, B[$ (où A et B sont exclus), de tailles différentes. Les segments du carré central donnent un carré ouvert (ni les côtés ni les sommets du carré ne sont couverts par ce premier empilement). Chaque rectangle obtenu progressivement lors de l'ajout de nouvelles piles est lui aussi ouvert. Avec des segments ouverts de même longueur, il n'y a pas de solution.





4

UNE NOUVELLE CONFIGURATION DU JEU DE LA VIE

Le Jeu de la vie inventé en 1970 par Conway est toujours étudié et tous les problèmes qu'il pose n'ont pas été résolus. Une case du quadrillage carré du plan infini peut être vivante ou morte ; d'une génération à l'autre, une case passe de l'état vivant (*en noir*) à l'état mort (*en blanc*), ou l'inverse, ou reste stable, en fonction de ses huit cases voisines immédiates qui sont mortes ou vivantes.

La règle d'évolution tient en douze mots : naissance si trois voisines vivantes, survie si deux ou trois voisines vivantes. Certaines configurations ayant peu de cellules vivantes au départ s'étendent infiniment. Au mieux, la croissance du nombre de cellules vivantes augmente proportionnellement à n^2 où n est le numéro de la génération. Au mieux, la densité de cellules vivantes dans une partie stable du plan est $1/2$. Le résultat a été

démonstré sur 29 pages en 1997 par Noam Elkies, de l'université Harvard.

L'extraordinaire configuration figurée en haut a été découverte en avril 2020 par Mateusz Naćiszewski (www.conwaylife.com/wiki/Max). C'est la plus petite configuration connue qui, une fois lancée, recouvre avec une croissance quadratique le plan d'une population stable de cellules vivantes de densité $1/2$ (c'est donc le mieux possible en vitesse et en densité). Elle comporte 183 cellules au départ. On a dessiné à des échelles différentes la génération 0, et deux autres générations. On pense qu'il est impossible de faire mieux que 183, mais nul ne sait le démontrer. Notons aussi qu'il existe des configurations qui calculent les nombres premiers ou même qui affichent les unes après les autres des dessins représentant les décimales de $\pi = 3,14159...$

- > • $c=4$ avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 2 et donc $a=2$;
- $c=3$ avec pour âges des enfants 1, 1, 3 et donc $a=3$;
- $c=3$ avec pour âges des enfants 1, 2, 2 et donc $a=4$;
- $c=2$ avec pour âges des enfants 1, 4 et donc $a=4$;
- $c=2$ avec pour âges des enfants 2, 3 et donc $a=6$;
- $c=1$ avec pour âges des enfants 5 et donc $a=5$.

Dans chacun des cas possibles, la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants permet de connaître leurs différents âges. Puisque A a répondu NON, et que B connaît le numéro du bus, cela signifie que b n'est pas égal à 5.

Pour résoudre le problème, on peut de la même façon prendre les numéros de bus possibles un par un et rechercher ceux qui entraîneront que « la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants n'entraîne pas la connaissance de chacun des âges des enfants » (propriété P).

En menant les calculs pour $b=1, 2, 3, \dots, 12$ (comme on vient de le faire pour $b=5$), on découvre que $b=12$ est le plus petit nombre ayant cette propriété P.

En effet pour $b=12$ et $c=4$, on a deux listes d'âges possibles de même longueur pour les enfants, (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent le même âge pour le sorcier A, $a=48$. Il n'existe pas deux autres listes de même longueur et de même produit pour $b=12$. Pour $b=12$, même en sachant que $c=4$ et $a=48$, il est donc impossible de déduire la liste des âges des enfants. Peut-on en déduire que $b=12$ est la solution ?

Malheureusement non. Pour le numéro de bus $b=13$, à cause des listes (1, 6, 6) et (2, 2, 9) qui sont toutes les deux compatibles avec $a=36$, le sorcier B ne peut pas non plus tirer de la connaissance de l'âge de A et du nombre de ses enfants les âges de ces derniers.

Savoir que $b=12$ ne permet pas plus de conclure à l'âge des enfants que savoir que $b=13$. Ceux à qui on pose le problème répondent souvent « $b=12$ » comme si l'énoncé affirmait que la plus petite solution possible pour b était la bonne. Mais ce n'est pas indiqué dans l'énoncé et sans argument supplémentaire, on ne peut pas choisir entre $b=12$ et $b=13$, ni d'ailleurs entre d'autres valeurs pour b comme la poursuite du calcul montre qu'il y en a.

Pourtant $b=12$ est la bonne réponse et sa justification est le côté le plus intéressant et inattendu du problème. Conway a soigneusement rédigé son énoncé et la dernière phrase du sorcier B doit être prise en compte. Après le NON prononcé par A, le sorcier B a ajouté : « Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez ! » Cela permet d'éliminer $b=13$.