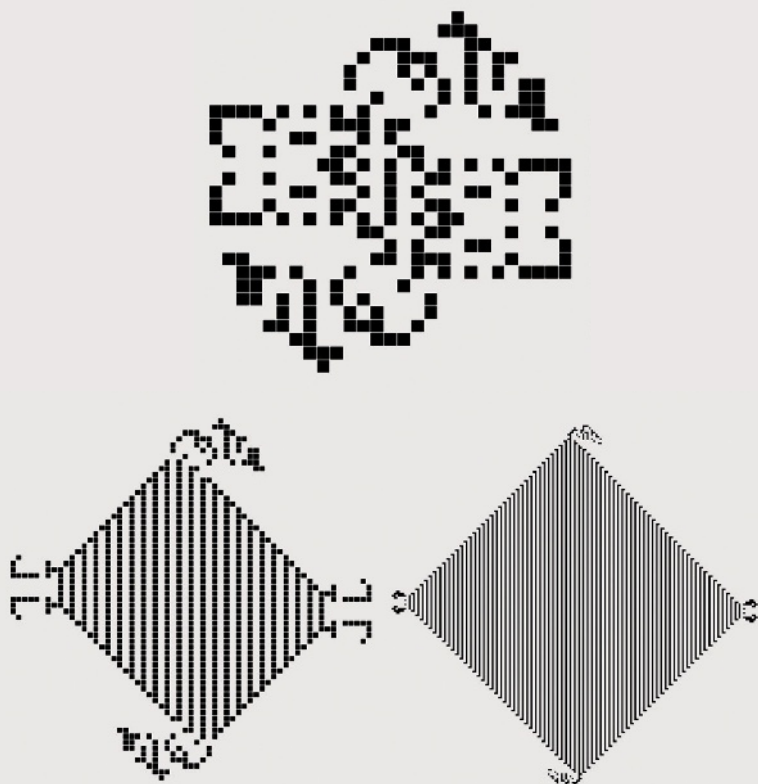




UNE NOUVELLE CONFIGURATION DU JEU DE LA VIE

Le Jeu de la vie inventé en 1970 par Conway est toujours étudié et tous les problèmes qu'il pose n'ont pas été résolus. Une case du quadrillage carré du plan infini peut être vivante ou morte ; d'une génération à l'autre, une case passe de l'état vivant (en noir) à l'état mort (en blanc), ou l'inverse, ou reste stable, en fonction de ses huit cases voisines immédiates qui sont mortes ou vivantes.

La règle d'évolution tient en douze mots : naissance si trois voisines vivantes, survie si deux ou trois voisines vivantes. Certaines configurations ayant peu de cellules vivantes au départ s'étendent infiniment. Au mieux, la croissance du nombre de cellules vivantes augmente proportionnellement à n^2 où n est le numéro de la génération. Au mieux, la densité de cellules vivantes dans une partie stable du plan est $1/2$. Le résultat a été

démonstré sur 29 pages en 1997 par Noam Elkies, de l'université Harvard.

L'extraordinaire configuration figurée en haut a été découverte en avril 2020 par Mateusz Naściszewski (www.conwaylife.com/wiki/Max). C'est la plus petite configuration connue qui, une fois lancée, recouvre avec une croissance quadratique le plan d'une population stable de cellules vivantes de densité $1/2$ (c'est donc le mieux possible en vitesse et en densité). Elle comporte 183 cellules au départ. On a dessiné à des échelles différentes la génération 0, et deux autres générations. On pense qu'il est impossible de faire mieux que 183, mais nul ne sait le démontrer. Notons aussi qu'il existe des configurations qui calculent les nombres premiers ou même qui affichent les unes après les autres des dessins représentant les décimales de $\pi = 3,14159...$

- $c=4$ avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 2 et donc $a=2$;
- $c=3$ avec pour âges des enfants 1, 1, 3 et donc $a=3$;
- $c=3$ avec pour âges des enfants 1, 2, 2 et donc $a=4$;
- $c=2$ avec pour âges des enfants 1, 4 et donc $a=4$;
- $c=2$ avec pour âges des enfants 2, 3 et donc $a=6$;
- $c=1$ avec pour âges des enfants 5 et donc $a=5$.

Dans chacun des cas possibles, la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants permet de connaître leurs différents âges. Puisque A a répondu NON, et que B connaît le numéro du bus, cela signifie que b n'est pas égal à 5.

Pour résoudre le problème, on peut de la même façon prendre les numéros de bus possibles un par un et rechercher ceux qui entraîneront que « la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants n'entraîne pas la connaissance de chacun des âges des enfants » (propriété P).

En menant les calculs pour $b=1, 2, 3, \dots, 12$ (comme on vient de le faire pour $b=5$), on découvre que $b=12$ est le plus petit nombre ayant cette propriété P.

En effet pour $b=12$ et $c=4$, on a deux listes d'âges possibles de même longueur pour les enfants, (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent le même âge pour le sorcier A, $a=48$. Il n'existe pas deux autres listes de même longueur et de même produit pour $b=12$. Pour $b=12$, même en sachant que $c=4$ et $a=48$, il est donc impossible de déduire la liste des âges des enfants. Peut-on en déduire que $b=12$ est la solution ?

Malheureusement non. Pour le numéro de bus $b=13$, à cause des listes (1, 6, 6) et (2, 2, 9) qui sont toutes les deux compatibles avec $a=36$, le sorcier B ne peut pas non plus tirer de la connaissance de l'âge de A et du nombre de ses enfants les âges de ces derniers.

Savoir que $b=12$ ne permet pas plus de conclure à l'âge des enfants que savoir que $b=13$. Ceux à qui on pose le problème répondent souvent « $b=12$ » comme si l'énoncé affirmait que la plus petite solution possible pour b était la bonne. Mais ce n'est pas indiqué dans l'énoncé et sans argument supplémentaire, on ne peut pas choisir entre $b=12$ et $b=13$, ni d'ailleurs entre d'autres valeurs pour b comme la poursuite du calcul montre qu'il y en a.

Pourtant $b=12$ est la bonne réponse et sa justification est le côté le plus intéressant et inattendu du problème. Conway a soigneusement rédigé son énoncé et la dernière phrase du sorcier B doit être prise en compte. Après le NON prononcé par A, le sorcier B a ajouté : « Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez ! » Cela permet d'éliminer $b=13$.

En effet, pour $b=13$, il y a aussi les deux listes d'âges des enfants (1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 3, 4, 4) qui donnent l'âge $a=48$. Autrement dit, si le bus avait pour numéro 13, B ne pourrait pas déduire de la réponse négative du sorcier A l'âge de A, car celui-ci pourrait être 36 ou 48. Le numéro de bus $b=13$ est donc à éliminer.

Mais l'élimination de $b=13$ entraîne l'élimination de $b=14$ en considérant les séquences d'âges trouvées pour $b=13$ et en leur ajoutant le nombre 1, ce qui donne (1, 1, 6, 6) et (1, 2, 2, 9) avec $a=36$ d'une part, et (1, 1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 1, 3, 4, 4) avec $a=48$ d'autre part. Selon le même procédé de l'élimination de $b=14$, on en tire l'élimination de $b=15$ et, de proche en proche, de tous les b supérieurs à 12.

Finalement, seul reste le numéro de bus $b=12$ avec les séquences (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent l'âge du sorcier A: $a=48$.

À la vue de tous les calculs qu'il faut faire pour avoir la solution et dont je n'ai pas recopié le détail qui occupe plusieurs pages, j'avoue que je ne comprends pas comment Conway a pu concevoir ce problème inouï!

PAVAGES DU PLAN

PAR DES SEGMENTS DE DROITE

Paver le plan avec des carrés est facile, et il en est de même avec des triangles équilatéraux ou des hexagones. On peut aussi paver le plan avec des droites: il suffit de les placer toutes côte à côte et parallèles. Il y en aura une infinité non dénombrable, mais ce sera un pavage parfaitement satisfaisant, car chaque point du plan appartiendra à une droite du pavage et à une seule. Voici des questions plus délicates:

- Peut-on paver le plan avec des segments fermés, c'est-à-dire des segments de droite $[A, B]$ incluant les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments ouverts, c'est-à-dire des segments $]A, B[$ dont on ne retient pas les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments semi-ouverts, c'est-à-dire des segments $]A, B]$ dont on ne retient qu'une seule extrémité?

Réfléchissez à ces questions inhabituelles, mais naturelles. Elles ne sont pas si simples. L'encadré 3 donne les solutions. Dans un magnifique article de 1964, Conway abordait avec un collègue (voir la bibliographie) ce type de questions et bien d'autres, prouvant encore une fois que des questions très simples auxquelles personne ne pense sont de belles occasions de faire des mathématiques... pas tout à fait évidentes.

L'INDÉCIDABILITÉ DE LA CONJECTURE DE COLLATZ

Le dernier thème intéresse les mathématiciens amateurs autant que les professionnels. Considérons la fonction f qui, pour les

entiers positifs pairs n donne $n/2$, et qui donne $3n+1$, pour les entiers positifs impairs. Partons de l'entier 7 et appliquons f : on obtient 22, puis en recommençant, 11, puis 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. Une fois que l'on arrive à 1, on tourne en rond.

Quel que soit l'entier n de départ, il semble qu'on finisse toujours par arriver à 1 et à tourner en rond. Des calculs par ordinateur ont testé cette propriété, qui est vraie pour tous les n jusqu'à au moins 87×2^{60} (environ 10^{20}). On n'a cependant pas réussi à prouver que c'est toujours le cas, ni à trouver de n initial qui donnerait une suite allant vers l'infini ou aboutissant à un autre cycle que (4, 2, 1).

Une multitude de travaux ont été consacrés au problème (nommé «conjecture de Collatz» ou «conjecture de Syracuse»), dont plusieurs ont été réunis en un livre (voir la bibliographie). La grande simplicité de l'énoncé du problème attire les amateurs, et je reçois régulièrement des propositions de solutions qui, jusqu'à présent, sont soit fausses soit incompréhensibles.

Conway face à un tel défi, aussi simple à énoncer et qui pourtant résiste depuis plus de quatre-vingts ans à toutes les tentatives de résolution, ne pouvait rester indifférent.

En 1972, il a publié un premier article sur le sujet où il propose des problèmes d'une formulation proche dont il démontre l'indécidabilité. Pour certaines valeurs de l'entier de départ, la suite engendrée par la variante de f ne finit pas par arriver à 1, mais la théorie des ensembles ne peut pas le démontrer. Plus généralement, pour tout système de démonstration S , il existe un problème de cette catégorie et un point de départ qui n'aboutit pas à 1, ce qui n'est pas démontrable avec les moyens de S .

En 2013, Conway est revenu sur la question et a donné des arguments de type probabiliste suggérant que le problème de Collatz lui-même échappe au pouvoir des preuves des systèmes d'axiomes utilisés habituellement en mathématiques. Il ne s'agit pas d'une démonstration définitive de l'indécidabilité de la conjecture de Collatz, mais le type d'arguments qu'il propose semble assez sérieusement indiquer que ce n'est pas un hasard si tout le monde bute sur la résolution de la conjecture.

Tout mathématicien rencontre des problèmes qu'il ne réussit pas à résoudre. Conway n'a pas échappé à cette règle générale, mais ses capacités particulières de logicien lui ont en quelque sorte permis de se consoler en prouvant un résultat d'indécidabilité et en élaborant des arguments suggérant que ce problème, si simple à énoncer et qui lui a résisté, continuerait indéfiniment à résister à tous les mathématiciens. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. H. Conway, **On unsetttable arithmetical problems**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 120(3), pp. 192-198, 2013.

T. Khovanova, **Conway's Wizards**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 35, pp. 18-20, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1210.5460.pdf>).

J. H. Conway, **Unpredictable iterations**, *Proceedings of Number Theory Conference*, Boulder, CO, 1972, pp. 49-52; Repris dans : J. Lagarias (ed.), **The Ultimate Challenge : The $3x + 1$ Problem**, American Mathematical Society, 2010.

J. H. Conway, **The power of mathematics**, dans A. Blackwell & D. MacKay (eds.), *Power*, Cambridge University Press, 2006, pp. 36-50

J. H. Conway et H. T. Croft, **Covering a sphere with congruent great-circle arcs**, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 60(4), pp. 787-800, 1964.