

En effet, pour $b=13$, il y a aussi les deux listes d'âges des enfants (1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 3, 4, 4) qui donnent l'âge $a=48$. Autrement dit, si le bus avait pour numéro 13, B ne pourrait pas déduire de la réponse négative du sorcier A l'âge de A, car celui-ci pourrait être 36 ou 48. Le numéro de bus $b=13$ est donc à éliminer.

Mais l'élimination de $b=13$ entraîne l'élimination de $b=14$ en considérant les séquences d'âges trouvées pour $b=13$ et en leur ajoutant le nombre 1, ce qui donne (1, 1, 6, 6) et (1, 2, 2, 9) avec $a=36$ d'une part, et (1, 1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 1, 3, 4, 4) avec $a=48$ d'autre part. Selon le même procédé de l'élimination de $b=14$, on en tire l'élimination de $b=15$ et, de proche en proche, de tous les b supérieurs à 12.

Finalement, seul reste le numéro de bus $b=12$ avec les séquences (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent l'âge du sorcier A: $a=48$.

À la vue de tous les calculs qu'il faut faire pour avoir la solution et dont je n'ai pas recopié le détail qui occupe plusieurs pages, j'avoue que je ne comprends pas comment Conway a pu concevoir ce problème inouï!

PAVAGES DU PLAN PAR DES SEGMENTS DE DROITE

Paver le plan avec des carrés est facile, et il en est de même avec des triangles équilatéraux ou des hexagones. On peut aussi paver le plan avec des droites: il suffit de les placer toutes côte à côte et parallèles. Il y en aura une infinité non dénombrable, mais ce sera un pavage parfaitement satisfaisant, car chaque point du plan appartiendra à une droite du pavage et à une seule. Voici des questions plus délicates:

- Peut-on paver le plan avec des segments fermés, c'est-à-dire des segments de droite $[A, B]$ incluant les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments ouverts, c'est-à-dire des segments $]A, B[$ dont on ne retient pas les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments semi-ouverts, c'est-à-dire des segments $]A, B]$ dont on ne retient qu'une seule extrémité?

Réfléchissez à ces questions inhabituelles, mais naturelles. Elles ne sont pas si simples. L'encadré 3 donne les solutions. Dans un magnifique article de 1964, Conway abordait avec un collègue (voir la bibliographie) ce type de questions et bien d'autres, prouvant encore une fois que des questions très simples auxquelles personne ne pense sont de belles occasions de faire des mathématiques... pas tout à fait évidentes.

L'INDÉCIDABILITÉ DE LA CONJECTURE DE COLLATZ

Le dernier thème intéresse les mathématiciens amateurs autant que les professionnels. Considérons la fonction f qui, pour les

entiers positifs pairs n donne $n/2$, et qui donne $3n+1$, pour les entiers positifs impairs. Partons de l'entier 7 et appliquons f : on obtient 22, puis en recommençant, 11, puis 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. Une fois que l'on arrive à 1, on tourne en rond.

Quel que soit l'entier n de départ, il semble qu'on finisse toujours par arriver à 1 et à tourner en rond. Des calculs par ordinateur ont testé cette propriété, qui est vraie pour tous les n jusqu'à au moins 87×2^{60} (environ 10^{20}). On n'a cependant pas réussi à prouver que c'est toujours le cas, ni à trouver de n initial qui donnerait une suite allant vers l'infini ou aboutissant à un autre cycle que (4, 2, 1).

Une multitude de travaux ont été consacrés au problème (nommé «conjecture de Collatz» ou «conjecture de Syracuse»), dont plusieurs ont été réunis en un livre (voir la bibliographie). La grande simplicité de l'énoncé du problème attire les amateurs, et je reçois régulièrement des propositions de solutions qui, jusqu'à présent, sont soit fausses soit incompréhensibles.

Conway face à un tel défi, aussi simple à énoncer et qui pourtant résiste depuis plus de quatre-vingts ans à toutes les tentatives de résolution, ne pouvait rester indifférent.

En 1972, il a publié un premier article sur le sujet où il propose des problèmes d'une formulation proche dont il démontre l'indécidabilité. Pour certaines valeurs de l'entier de départ, la suite engendrée par la variante de f ne finit pas par arriver à 1, mais la théorie des ensembles ne peut pas le démontrer. Plus généralement, pour tout système de démonstration S , il existe un problème de cette catégorie et un point de départ qui n'aboutit pas à 1, ce qui n'est pas démontrable avec les moyens de S .

En 2013, Conway est revenu sur la question et a donné des arguments de type probabiliste suggérant que le problème de Collatz lui-même échappe au pouvoir des preuves des systèmes d'axiomes utilisés habituellement en mathématiques. Il ne s'agit pas d'une démonstration définitive de l'indécidabilité de la conjecture de Collatz, mais le type d'arguments qu'il propose semble assez sérieusement indiquer que ce n'est pas un hasard si tout le monde bute sur la résolution de la conjecture.

Tout mathématicien rencontre des problèmes qu'il ne réussit pas à résoudre. Conway n'a pas échappé à cette règle générale, mais ses capacités particulières de logicien lui ont en quelque sorte permis de se consoler en prouvant un résultat d'indécidabilité et en élaborant des arguments suggérant que ce problème, si simple à énoncer et qui lui a résisté, continuerait indéfiniment à résister à tous les mathématiciens. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. H. Conway, **On unsetttable arithmetical problems**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 120(3), pp. 192-198, 2013.

T. Khovanova, **Conway's Wizards**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 35, pp. 18-20, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1210.5460.pdf>).

J. H. Conway, **Unpredictable iterations**, *Proceedings of Number Theory Conference*, Boulder, CO, 1972, pp. 49-52; Repris dans : J. Lagarias (ed.), **The Ultimate Challenge : The $3x + 1$ Problem**, American Mathematical Society, 2010.

J. H. Conway, **The power of mathematics**, dans A. Blackwell & D. MacKay (eds.), *Power*, Cambridge University Press, 2006, pp. 36-50

J. H. Conway et H. T. Croft, **Covering a sphere with congruent great-circle arcs**, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 60(4), pp. 787-800, 1964.