

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul

P.86 Art & science

P.88 Idées de physique

P.92 Chroniques de l'évolution

P.96 Science & gastronomie

P.98 À picorer

DU FLOU ET DU FAUX EN MATHÉMATIQUES

Les mathématiques sont la plus précise et la plus exacte des sciences... Leur histoire nous montre pourtant de nombreux exemples d'erreurs importantes. Comment limiter les risques d'en produire d'autres?

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En voulant aller vite et aussi loin que possible, les mathématiciens prennent des risques qu'ils ne dominent pas toujours et qui les conduisent parfois à énoncer des théorèmes faux, ou des théorèmes vrais s'appuyant sur des démonstrations fausses. Avec la complexité croissante des domaines abordés, de nouvelles méthodes deviennent nécessaires pour traquer les erreurs.

UNE CRISE DE LA REPRODUCTIBILITÉ

Depuis une quinzaine d'années, divers journaux scientifiques de premier rang ont alerté sur le problème de la reproductibilité en science. En mai 2016, la revue britannique *Nature* publiait une étude où il apparaissait que 70 % des chercheurs qu'elle avait interrogés déclaraient avoir au moins une fois échoué en tentant de reproduire un résultat publié qui les intéressait.

Les mathématiques ne semblaient pas concernées; pourtant, vérifier une démonstration publiée est une forme de « reproduction ». Quand un chercheur propose un résultat et indique sa démonstration, il prétend disposer d'une argumentation le conduisant de manière certaine à la conclusion; lire et contrôler ses affirmations, c'est reproduire cette expérience mentale. Le problème de la reproductibilité concerne donc les mathématiques et on va voir qu'il y est particulièrement délicat.

On pourrait croire que tout mathématicien compétent peut lire tout article de mathématiques et vérifier les démonstrations qui y sont présentées. C'est faux pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, la lecture d'un article mathématique exige souvent une bonne connaissance des concepts, définitions, résultats antérieurs et méthodes du sujet auquel il se rattache. Depuis que l'étendue des domaines mathématiques s'est considérablement accrue au xx^e siècle, chaque chercheur n'est compétent que pour une faible proportion des milliers d'articles de mathématiques publiés chaque année.

Il y a cependant une raison plus profonde qui rend difficile la vérification même pour un spécialiste: une démonstration n'est que l'indication plus ou moins détaillée d'un cheminement argumentatif, avec parfois des passages importants omis ou des raccourcis dangereux.

Pour lire étape par étape une démonstration, il faut ainsi: être très bien informé du domaine; être prêt à travailler longuement sur certains pas du raisonnement qui exigent des calculs non explicités ou le traitement de cas non détaillés; parfois aussi, programmer des vérifications par ordinateur car c'est inconcevable autrement; enfin, dans certains cas, être aussi génial que l'auteur, et en mathématiques il y a d'exceptionnels chercheurs aux capacités au-dessus de la moyenne qui n'ont pas conscience qu'il faut expliquer des points qui leur semblent évidents... et qui ne le sont que pour eux.

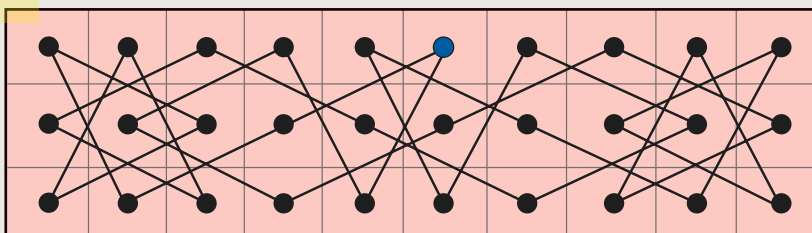
De cette situation, il résulte que de nombreuses erreurs sont commises, publiées et ignorées parfois assez longtemps. Plusieurs livres ont été consacrés aux erreurs en mathématiques, mais on réalise aussi des progrès sensibles pour contrôler et corriger les résultats les plus importants.

LE PARCOURS DU CAVALIER

1

Rechercher si un cavalier du jeu d'échecs peut parcourir toutes les cases d'un damier $m \times n$ sans passer deux fois par la même case et en revenant à son point de départ (parcours fermé) peut sembler un problème de moindre intérêt. Pourtant, on s'y est intéressé depuis le x^e siècle en Inde et Leonhard Euler y consacra un article assez long (« Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, vol. 15, pp. 310-337, année 1759, Berlin 1766, <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E309.pdf>).

Parmi les questions les plus simples qui se posent, il y a celle des échiquiers de taille $3 \times n$. Lorsque n est impair,



il n'y a pas de solution car, plus généralement, il n'y a pas de solution si n et m sont impairs (trouvez-vous pourquoi ?). En revanche, pour tous les nombres pairs n à partir de 10, il y a des solutions (voir la figure ci-dessus) contrairement à ce qu'affirme Euler.

Son erreur ne fut corrigée qu'un siècle et demi plus tard, en 1917, par Ernest Bergholt. Pour ceux que ce type de

problèmes intéresse, le site très complet www.mayhematics.com/t/t.htm est à consulter.

Il est remarquable que le problème suscite encore des travaux mathématiques, par exemple la thèse de master d'Alfred Brown, « Knight's tour and Zeta function », soutenue en 2017 à l'université de l'État de San José, aux États-Unis.

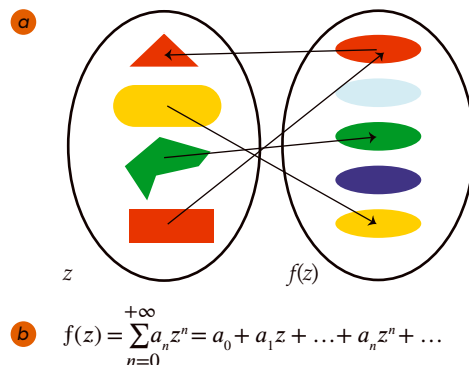
MÉCANIQUEMENT VÉRIFIABLES: LES PREUVES FORMELLES

Il existe plusieurs notions de « preuve formelle » qui, quand elles sont écrites, sont vérifiables mécaniquement, c'est-à-dire par un programme informatique. Malheureusement, ce ne sont pas ces preuves formelles qu'écrivent les mathématiciens dans leurs articles, car elles seraient trop longues et masqueraient les idées importantes dans un fouillis d'arguments logiques et de microcalculs.

Pour David Ruelle, physicien-mathématicien à l'IHES, près de Paris, « les mathématiques humaines consistent en fait à parler de preuves formelles, et non à les écrire réellement. Le mathématicien affirme de manière assez convaincante qu'il existe un certain texte formel aboutissant aux résultats qu'il propose, et qu'il serait possible de l'explicitier totalement, mais il ne le fait pas car ce serait un travail difficile inadapté au cerveau humain, qui n'est pas doué pour vérifier qu'un long texte formel est exempt d'erreurs. Les mathématiques humaines sont une sorte de danse autour d'un texte formel non écrit, qui, s'il était écrit, serait illisible. »

Le problème des erreurs mathématiques n'est pas nouveau, d'autant que les notions de preuve formelle qui permettent de mettre tout le monde d'accord – nous allons y revenir – n'existent que depuis le début du xx^e siècle. Tout au long de son histoire, les mathématiques ont été confrontées aux croyances en des résultats inexacts, ou à l'illusion de tenir une démonstration pour un énoncé vrai, mais qui en réalité n'est pas démontré du fait d'éléments manquants ou faux dans le raisonnement, ou parfois à cause

2



LA NOTION DE FONCTION CHEZ EULER

Plus ennuyeuse que la question du cavalier, où Euler a commis une erreur ponctuelle, la façon dont il a traité le concept de fonction était le centre d'une ambiguïté et même d'une contradiction puisqu'il souhaitait à la fois disposer d'un concept proche de celui de polynôme et énoncer des résultats valables pour une large classe de fonctions, sans réussir à les définir précisément. Ou plutôt en proposant une définition manquant de clarté : « Une fonction est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes » (*Introductio in analysin infinitorum*, Marcum-Michaellem Bousquet & socios, 1748).

Aujourd'hui, une fonction est définie comme une relation – notion ensembliste précise – qui, à tout point d'un ensemble de départ, en associe un dans l'ensemble d'arrivée (a), sans aucune contrainte particulière. Or les théorèmes de l'analyse qu'Euler s'est appliqué à préciser ne concernent que des classes réduites de fonctions, comme celles développables en série entière (b). On a là un exemple de manque de rigueur apparemment grave qui cependant n'empêche pas les progrès d'un domaine mathématique qui ne devient logiquement parfait que plus tard (voir J. Dhombres, « Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle », *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40(2), pp. 179-202, 1987).