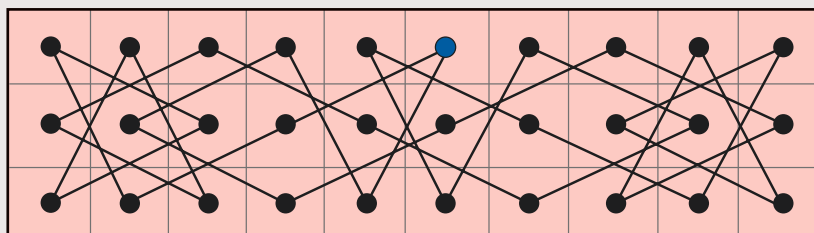


LE PARCOURS DU CAVALIER

1

Rechercher si un cavalier du jeu d'échecs peut parcourir toutes les cases d'un damier $m \times n$ sans passer deux fois par la même case et en revenant à son point de départ (parcours fermé) peut sembler un problème de moindre intérêt. Pourtant, on s'y est intéressé depuis le x^e siècle en Inde et Leonhard Euler y consacra un article assez long (« Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, vol. 15, pp. 310-337, année 1759, Berlin 1766, <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E309.pdf>).

Parmi les questions les plus simples qui se posent, il y a celle des échiquiers de taille $3 \times n$. Lorsque n est impair,



il n'y a pas de solution car, plus généralement, il n'y a pas de solution si n et m sont impairs (trouvez-vous pourquoi ?). En revanche, pour tous les nombres pairs n à partir de 10, il y a des solutions (voir la figure ci-dessus) contrairement à ce qu'affirme Euler.

Son erreur ne fut corrigée qu'un siècle et demi plus tard, en 1917, par Ernest Bergholt. Pour ceux que ce type de

problèmes intéresse, le site très complet www.mayhematics.com/t/t.htm est à consulter.

Il est remarquable que le problème suscite encore des travaux mathématiques, par exemple la thèse de master d'Alfred Brown, « Knight's tour and Zeta function », soutenue en 2017 à l'université de l'État de San José, aux États-Unis.

MÉCANIQUEMENT VÉRIFIABLES: LES PREUVES FORMELLES

Il existe plusieurs notions de « preuve formelle » qui, quand elles sont écrites, sont vérifiables mécaniquement, c'est-à-dire par un programme informatique. Malheureusement, ce ne sont pas ces preuves formelles qu'écrivent les mathématiciens dans leurs articles, car elles seraient trop longues et masqueraient les idées importantes dans un fouillis d'arguments logiques et de microcalculs.

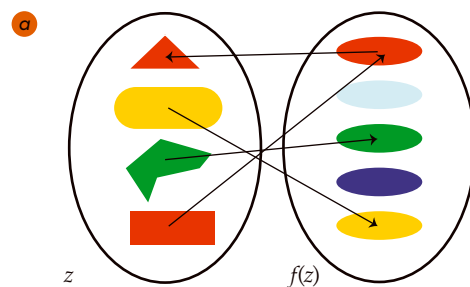
Pour David Ruelle, physicien-mathématicien à l'IHES, près de Paris, « les mathématiques humaines consistent en fait à parler de preuves formelles, et non à les écrire réellement. Le mathématicien affirme de manière assez convaincante qu'il existe un certain texte formel aboutissant aux résultats qu'il propose, et qu'il serait possible de l'explicitier totalement, mais il ne le fait pas car ce serait un travail difficile inadapté au cerveau humain, qui n'est pas doué pour vérifier qu'un long texte formel est exempt d'erreurs. Les mathématiques humaines sont une sorte de danse autour d'un texte formel non écrit, qui, s'il était écrit, serait illisible. »

Le problème des erreurs mathématiques n'est pas nouveau, d'autant que les notions de preuve formelle qui permettent de mettre tout le monde d'accord – nous allons y revenir – n'existent que depuis le début du xx^e siècle. Tout au long de son histoire, les mathématiques ont été confrontées aux croyances en des résultats inexacts, ou à l'illusion de tenir une démonstration pour un énoncé vrai, mais qui en réalité n'est pas démontré du fait d'éléments manquants ou faux dans le raisonnement, ou parfois à cause

2

LA NOTION DE FONCTION CHEZ EULER

Plus ennuyeuse que la question du cavalier, où Euler a commis une erreur ponctuelle, la façon dont il a traité le concept de fonction était le centre d'une ambiguïté et même d'une contradiction puisqu'il souhaitait à la fois disposer d'un concept proche de celui de polynôme et énoncer des résultats valables pour une large classe de fonctions, sans réussir à les définir précisément. Ou plutôt en proposant une définition manquant de clarté : « Une fonction est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes » (*Introductio in analysin infinitorum*, Marcum-Michael Bousquet & socios, 1748).



$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

Aujourd'hui, une fonction est définie comme une relation – notion ensembliste précise – qui, à tout point d'un ensemble de départ, en associe un dans l'ensemble d'arrivée (a), sans aucune contrainte particulière. Or les théorèmes de l'analyse qu'Euler s'est appliqué à préciser ne concernent que des classes réduites de fonctions, comme celles développables en série entière (b). On a là un exemple de manque de rigueur apparemment grave qui cependant n'empêche pas les progrès d'un domaine mathématique qui ne devient logiquement parfait que plus tard (voir J. Dhombres, « Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle », *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40(2), pp. 179-202, 1987).

> de concepts mal éclaircis comme celui de nombre ou de fonction.

Voici rapidement quelques exemples pris chez les plus grands mathématiciens et qui montrent que personne n'atteint la perfection en mathématiques.

En Grèce, au VI^e siècle avant notre ère, le mystérieux Pythagore soutenait que le rapport de deux grandeurs est toujours équivalent au rapport de deux nombres entiers. Les démonstrations découvertes à son époque de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté, ou en langage moderne de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ont semble-t-il troublé les membres de son école. Notons cependant que les historiens sont unanimes pour considérer que la correction de l'erreur de Pythagore a été l'une des étapes les plus importantes du progrès des mathématiques.

TOUT EST PRESQUE PARFAIT CHEZ EUCLIDE

Deux siècles plus tard environ, Euclide nous a laissé un traité, les *Éléments*, d'une étonnante maturité et d'une rigueur telle qu'aujourd'hui encore nous pouvons lire, comprendre et approuver l'essentiel de ses démonstrations. Pourtant, les lecteurs attentifs d'Euclide ont repéré une série d'omissions, par exemple dans sa formulation des axiomes de la géométrie, ou d'imprécisions rendant fausses ou incomplètes certaines de ses démonstrations. L'utilisation de figures le conduit à des arguments qui ne sont valides que pour une disposition particulière des éléments en présence. Parfois aussi, il considère

comme évidentes des propriétés qu'aujourd'hui nous nous imposons de démontrer, comme l'existence d'un point commun à deux courbes (droites, cercles, etc.) qui se croisent. Ce problème lié à la continuité se pose dès la proposition 1 du livre 1 des *Éléments*, quand Euclide construit avec un compas un triangle équilatéral sur un segment AB donné.

EULER, «NOTRE MAÎTRE À TOUS»

Sautons deux millénaires pour évoquer quelques-uns des génies de l'époque moderne. Le mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) est peut-être le plus grand : il a écrit un nombre considérable de mémoires mathématiques réunis aujourd'hui dans les soixante-dix tomes de ses œuvres complètes (<http://eulerarchive.maa.org>). Il a fait considérablement progresser l'analyse et Pierre-Simon de Laplace conseillait : «Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.» Pourtant, ce prodigieux mathématicien s'est parfois trompé en indiquant par exemple qu'il n'existait jamais de cheminement fermé d'un cavalier sur un échiquier rectangulaire $3 \times n$ alors qu'il en existe par exemple pour les échiquiers 3×10 (voir l'encadré 1).

La rigueur des raisonnements d'Euler est parfois insuffisante et l'on considère aujourd'hui comme incomplète sa démonstration de 1749 du «théorème fondamental de l'algèbre» sur les racines d'un polynôme. La façon dont il utilise la notion de fonction, qu'il assimile plus ou moins à des polynômes de degré fini ou infini, manque de rigueur et même de clarté (voir l'encadré 2) ; c'est seulement au

3

LES CAUSES DES ERREURS

Aujourd'hui, les raisons de la présence d'erreurs parfois persistantes dans les travaux publiés par les mathématiciens sont multiples et peuvent être classées de la façon suivante.

1) Les procédures de contrôle avant publication sont très imparfaites. Certaines revues cherchent à publier le plus possible et n'exercent pas de filtre sérieux avant d'accepter les articles qu'elles publient. Même quand elles sont très rigoureuses, les revues confient l'expertise à des mathématiciens qui ne sont pas rémunérés

pour leur travail et restent anonymes, ce qui n'est peut-être pas la meilleure façon d'inciter ces experts à un travail approfondi de vérification.

2) Certains domaines sont très spécialisés et les travaux publiés ne sont connus que de très peu de chercheurs et donc très peu contrôlés ou pas du tout après leur publication. Une erreur présente dans un article pourra donc rester ignorée longtemps.

3) Certains domaines donnent lieu à des démonstrations extrêmement longues et terriblement difficiles,

qui nécessitent un travail considérable de contrôle. Cet examen ne peut être fait sérieusement qu'avec l'aide d'assistants informatiques de preuve, ce qui, pour certaines démonstrations, est encore difficile. Ainsi, il a fallu plusieurs années pour formaliser et valider la preuve par Thomas Hales de la démonstration de la conjecture de Kepler sur l'empilement le plus compact des sphères dans l'espace.