

> de concepts mal éclaircis comme celui de nombre ou de fonction.

Voici rapidement quelques exemples pris chez les plus grands mathématiciens et qui montrent que personne n'atteint la perfection en mathématiques.

En Grèce, au VI^e siècle avant notre ère, le mystérieux Pythagore soutenait que le rapport de deux grandeurs est toujours équivalent au rapport de deux nombres entiers. Les démonstrations découvertes à son époque de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté, ou en langage moderne de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ont semble-t-il troublé les membres de son école. Notons cependant que les historiens sont unanimes pour considérer que la correction de l'erreur de Pythagore a été l'une des étapes les plus importantes du progrès des mathématiques.

TOUT EST PRESQUE PARFAIT CHEZ EUCLIDE

Deux siècles plus tard environ, Euclide nous a laissé un traité, les *Éléments*, d'une étonnante maturité et d'une rigueur telle qu'aujourd'hui encore nous pouvons lire, comprendre et approuver l'essentiel de ses démonstrations. Pourtant, les lecteurs attentifs d'Euclide ont repéré une série d'omissions, par exemple dans sa formulation des axiomes de la géométrie, ou d'imprécisions rendant fausses ou incomplètes certaines de ses démonstrations. L'utilisation de figures le conduit à des arguments qui ne sont valides que pour une disposition particulière des éléments en présence. Parfois aussi, il considère

comme évidentes des propriétés qu'aujourd'hui nous nous imposons de démontrer, comme l'existence d'un point commun à deux courbes (droites, cercles, etc.) qui se croisent. Ce problème lié à la continuité se pose dès la proposition 1 du livre 1 des *Éléments*, quand Euclide construit avec un compas un triangle équilatéral sur un segment AB donné.

EULER, «NOTRE MAÎTRE À TOUS»

Sautons deux millénaires pour évoquer quelques-uns des génies de l'époque moderne. Le mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) est peut-être le plus grand : il a écrit un nombre considérable de mémoires mathématiques réunis aujourd'hui dans les soixante-dix tomes de ses œuvres complètes (<http://eulerarchive.maa.org>). Il a fait considérablement progresser l'analyse et Pierre-Simon de Laplace conseillait : «Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.» Pourtant, ce prodigieux mathématicien s'est parfois trompé en indiquant par exemple qu'il n'existait jamais de cheminement fermé d'un cavalier sur un échiquier rectangulaire $3 \times n$ alors qu'il en existe par exemple pour les échiquiers 3×10 (voir l'encadré 1).

La rigueur des raisonnements d'Euler est parfois insuffisante et l'on considère aujourd'hui comme incomplète sa démonstration de 1749 du «théorème fondamental de l'algèbre» sur les racines d'un polynôme. La façon dont il utilise la notion de fonction, qu'il assimile plus ou moins à des polynômes de degré fini ou infini, manque de rigueur et même de clarté (voir l'encadré 2) ; c'est seulement au

LES CAUSES DES ERREURS

3

Aujourd'hui, les raisons de la présence d'erreurs parfois persistantes dans les travaux publiés par les mathématiciens sont multiples et peuvent être classées de la façon suivante.

1) Les procédures de contrôle avant publication sont très imparfaites. Certaines revues cherchent à publier le plus possible et n'exercent pas de filtre sérieux avant d'accepter les articles qu'elles publient. Même quand elles sont très rigoureuses, les revues confient l'expertise à des mathématiciens qui ne sont pas rémunérés

pour leur travail et restent anonymes, ce qui n'est peut-être pas la meilleure façon d'inciter ces experts à un travail approfondi de vérification.

2) Certains domaines sont très spécialisés et les travaux publiés ne sont connus que de très peu de chercheurs et donc très peu contrôlés ou pas du tout après leur publication. Une erreur présente dans un article pourra donc rester ignorée longtemps.

3) Certains domaines donnent lieu à des démonstrations extrêmement longues et terriblement difficiles,

qui nécessitent un travail considérable de contrôle. Cet examen ne peut être fait sérieusement qu'avec l'aide d'assistants informatiques de preuve, ce qui, pour certaines démonstrations, est encore difficile. Ainsi, il a fallu plusieurs années pour formaliser et valider la preuve par Thomas Hales de la démonstration de la conjecture de Kepler sur l'empilement le plus compact des sphères dans l'espace.

xix^e siècle que l'on saura reprendre son précieux travail sur ces sujets et les mettre parfaitement en ordre.

Nous ne reviendrons pas sur le cas d'Augustin Cauchy et de son célèbre énoncé affirmant à tort qu'une limite de fonctions continues est aussi une fonction continue (<http://fredrickey.info/hm/CalcNotes/CauchyWrgPr.pdf>), ni sur Henri Poincaré et son mémoire faux qui lui valut le prix en l'honneur du roi Oscar de Suède (<https://journals.openedition.org/lettre-cdf/1103>) et qu'il fit réimprimer à ses frais après correction.

David Hilbert, lui aussi considéré comme l'un des plus grands mathématiciens et logiciens, a laissé un grand nombre de petites erreurs dans ses articles. Lorsqu'on décida, pour publier ses œuvres complètes, de les nettoyer de tout ce qui devait être remis sur pied, trois ans furent nécessaires à Olga Taussky-Todd pour réaliser le travail. Hilbert se trompa aussi une fois gravement en proposant une démonstration erronée de l'« hypothèse du continu », selon laquelle il n'y a pas d'infini intermédiaire entre celui des entiers et celui des nombres réels.

ÉCRIRE LES DÉMONSTRATIONS DANS LE LANGAGE DE LA LOGIQUE

Le développement de la logique a abouti au début du xx^e siècle à l'idée qu'une démonstration mathématique correcte peut être contrôlée mécaniquement, à condition de l'écrire dans un langage dont les premières esquisses furent proposées par Alfred Whitehead et Bertrand Russell dans les trois volumes des *Principia Mathematica* (1910-1913). En complétant légèrement la méthode des *Principia* dont la syntaxe de base n'est pas totalement fixée, on aboutit à la notion de « système formel » aujourd'hui au cœur de la logique mathématique. C'est elle qui donne son sens plein aux célèbres théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel, affirmant qu'aucun système formel ne sera jamais assez puissant pour toutes les mathématiques et qu'il sera donc toujours nécessaire de rechercher de nouveaux axiomes.

La précision absolue rendue possible par les systèmes formels aurait dû mettre fin aux erreurs en mathématiques. Ce n'était qu'illusion, car il est très difficile en pratique d'écrire ces textes mécaniquement vérifiables et qui fournissent d'absolues certitudes. Aujourd'hui, on a conçu des programmes informatiques, des « assistants de preuve », qui mettent au point ces preuves. Ces systèmes ne trouvent pas seuls de nouvelles démonstrations, mais aident les mathématiciens à écrire des démonstrations incontestables.

Grâce à eux, on a formalisé une part importante des mathématiques de base, ce qui >

4

LES ASSISTANTS DE PREUVE CORRIGENT LES ERREURS

Les systèmes informatiques dénommés « assistants de preuve » permettent aux mathématiciens d'écrire des démonstrations formelles, donc parfaitement complètes sans qu'aucune erreur ne puisse subsister. Ces logiciels ont-ils permis de corriger des erreurs passées inaperçues ? Dans certains cas oui (voir le cas de la preuve ontologique de Gödel dans le texte de l'article). Manuel Eberl est un expert qui travaille depuis des années à écrire des démonstrations en utilisant l'assistant de preuves Isabelle/HOL. Il témoigne de son travail :

« Normalement, il faut une compréhension très approfondie d'une preuve sur papier pour la formaliser et il faut réfléchir à la façon de s'y prendre pour la formaliser. [...] Si vous formalisez une démonstration particulière comme celle du théorème des nombres premiers [...], vous ne découvrirez probablement pas que tout est faux et que tout s'effondre, mais vous rencontrerez des petits problèmes.

J'ai trouvé des "erreurs" dans de nombreuses démonstrations, y compris quand elles étaient publiées dans des manuels scolaires ou des articles. La plupart de ces erreurs sont faciles à corriger et la plupart des mathématiciens les considéreraient probablement comme sans gravité. Certaines sont identifiées en quelques jours, d'autres nécessitent en fait de changer les définitions, d'ajouter des hypothèses ou de modifier l'énoncé du théorème. La plupart des "erreurs" entrent dans les catégories suivantes.

- Des arguments étonnamment non triviaux sont déclarés faciles et sans importance. [...]
- Des cas sont omis.

- Des erreurs arithmétiques sont commises, comme multiplier les deux côtés d'une inégalité par une constante dont on ne vérifie pas qu'elle est positive.
- Des hypothèses non indiquées sont utilisées subrepticement.

Je suis conscient que les mathématiciens ont souvent un point de vue indulgent. [...] Les types d'erreurs que je mentionne sont en général jugés insignifiants, et on pense que quelqu'un les aurait corrigées même en l'absence d'un système informatique, et donc que finalement les théorèmes et démonstrations incriminés sont corrects en un sens, puisque les problèmes identifiés sont mineurs.

Cependant, je ne suis pas d'accord avec cela. Je veux que mes démonstrations soient aussi rigoureuses que possible. Je veux être certain de n'avoir manqué aucune hypothèse. » (Pour le texte complet de Manuel Eberl, voir : <https://mathoverflow.net/questions/291158/proofs-assistant/312661>)



Manuel Eberl est chercheur à l'université technique de Munich, en Allemagne.