

démonstration plus courte (non formalisée) qui aura environ cinq mille pages.

- Le théorème prouvant la conjecture ABC (elle porte sur les diviseurs des nombres vérifiant $a+b=c$), qui reste l'objet d'une controverse entre mathématiciens: certains prétendent disposer d'une démonstration, d'autres considèrent qu'elle n'est pas satisfaisante.

Des domaines comme la géométrie algébrique présentent des difficultés considérables et il a semblé nécessaire à plusieurs mathématiciens, dont le médaillé Fields Vladimir Voevodski (1966-2017), de travailler à ce que les travaux de ce champ soient tous formalisés pour éviter les trop fréquentes démonstrations fausses, que même les meilleurs spécialistes avaient des difficultés à éliminer (voir dans cette rubrique « Les mathématiques au péril de la contradiction », *Pour la Science*, avril 2019).

APPLICATION À LA PREUVE ONTOLOGIQUE DE L'EXISTENCE DE DIEU

Un cas récent assez étrange et amusant a mis en évidence l'intérêt des assistants de preuve, qui servent maintenant à repérer et corriger des erreurs même dans des raisonnements philosophiques controversés.

Il est arrivé à Gödel, considéré comme le plus grand logicien ayant existé, de se tromper: en 1970, il soumit à Alfred Tarski, pour publication dans *Proceedings of The National Academy of Sciences*, une démonstration s'appuyant sur des axiomes nouveaux que l'hypothèse du continu était fausse. La preuve, erronée, ne fut jamais publiée.

Mais le cas le plus intéressant d'erreur de Gödel concerne un travail philosophico-logique portant sur la question de savoir si un pur raisonnement logique est susceptible de démontrer l'existence de Dieu. Anselme de Cantorbéry, au XI^e siècle, puis Gottfried Leibniz, au XVII^e siècle, avaient proposé de tels raisonnements utilisant les idées de perfection, de nécessité et d'existence combinées aussi rigoureusement que possible (*voir l'encadré 5*). Il s'agit là de jeux logiques qui présentent l'intérêt de permettre des analyses de concepts, surtout quand on les rend précis en les axiomatisant complètement, ce que Gödel a tenté de faire. Que l'on arrive à la conclusion que Dieu existe, ou que l'on arrive à la conclusion que les modes de raisonnements qu'on veut mettre en œuvre pour le prouver produisent des contradictions ou des énoncés inacceptables, est intéressant sur un plan logique.

Les travaux de Christoph Benz Müller et David Fuenmayor et de quelques chercheurs autour d'eux ont répondu aux questions qu'on pouvait se poser. En utilisant des systèmes de

démonstration et de vérification automatique de preuve, ils ont d'une part établi que le système d'axiomes utilisé par Gödel dans sa preuve ontologique était contradictoire, ce qui bien sûr retire toute valeur à son raisonnement. Cependant, en étudiant certaines variantes proposées par exemple par Dana Scott ou Melvin Fitting, ils ont pu valider ces variantes du raisonnement – qui, cette fois, s'appuient sur des systèmes ne produisant pas d'absurdités manifestes et aboutissent sans commettre de faute de raisonnement à la conclusion que Dieu existe, du moins un dieu tel que les axiomes adoptés l'envisagent. On dispose donc de systèmes d'axiomes passés dans la moulinette informatique dont on est certain qu'ils ne sont pas idiots, et qui laissent la place à des raisonnements sur l'existence de Dieu!

Ces exemples d'utilisation de la logique formelle et de systèmes informatiques de validation pour avancer sur des questions de nature philosophique doivent encourager les philosophes à rendre aussi précis que possible leurs hypothèses et le déroulement de leurs raisonnements. Selon Christoph Benz Müller, ces travaux ouvrent « de nouvelles perspectives pour une philosophie théorique assistée par ordinateur. La discussion critique des concepts, définitions et axiomes sous-jacents reste de la responsabilité des humains, mais l'ordinateur peut aider à construire et à vérifier que les arguments logiques sont rigoureusement corrects. En cas de conflit, l'ordinateur tranchera entre les arguments contradictoires et satisfera la recommandation de Leibniz *Calcuemus* ("Calculons!") ». Le rêve d'une langue parfaite, la *Characteristica Universalis*, que Leibniz voulait créer, où le vrai et le faux seraient identifiables par un simple calcul, est donc en partie réalisé.

PAS DE PROGRÈS SANS RISQUE...

C'est parce que les mathématiques progressent et qu'elles entrent dans des domaines d'une complexité bien supérieure à tout ce qu'on a connu aux siècles précédents qu'elles prennent des risques. La volonté d'aller le plus loin possible crée un danger qu'il faut accepter, à la condition de mettre en œuvre tout ce qui peut le limiter.

Sur la frontière entre le vrai et le faux, le terrain devient incertain; les mathématiques doivent donc inventer et perfectionner leurs outils de contrôle et, dans certains domaines, les utiliser systématiquement. Les erreurs qui se produisent sont non pas la preuve d'un risque général et croissant auquel les mathématiques seraient soumises, car les garanties se renforcent dans la partie centrale qui s'étend, mais la manifestation de la vitalité d'une science curieuse et assoiffée, et qui depuis toujours explore et défriche sans répit des terres nouvelles. ■

BIBLIOGRAPHIE

C. Benz Müller et D. Fuenmayor, **Computer-supported analysis of positive properties, ultrafilters and modal collapse in variants of Gödel's ontological argument**, *Bulletin of the Section of Logic*, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1910.08955>).

D. Fuenmayor et C. Benz Müller, **Automating emendations of the ontological argument in intensional higher-order modal logic**, *Joint German/Austrian Conference on Artificial Intelligence*, Springer, 2017 (<https://bit.ly/33tso5Z>).

C. Benz Müller et B. Woltzenlogel Paleo, **The inconsistency in Gödel's ontological argument : A success story for AI in metaphysics**, *Proceedings of the 25th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2016 (<https://bit.ly/3gszT0N>).

J.-P. Delahaye, **Comment vérifier les longues démonstrations**, *Pour la Science*, n° 452, juin 2015.

A. Posamentier et I. Lehmann, **Magnificent Mistakes in Mathematics**, Prometheus Books, 2013.

M. Lecat, **Erreurs de mathématiciens, des origines à nos jours**, Castaigne, 1935.