

démonstration plus courte (non formalisée) qui aura environ cinq mille pages.

- Le théorème prouvant la conjecture ABC (elle porte sur les diviseurs des nombres vérifiant $a+b=c$), qui reste l'objet d'une controverse entre mathématiciens: certains prétendent disposer d'une démonstration, d'autres considèrent qu'elle n'est pas satisfaisante.

Des domaines comme la géométrie algébrique présentent des difficultés considérables et il a semblé nécessaire à plusieurs mathématiciens, dont le médaillé Fields Vladimir Voevodski (1966-2017), de travailler à ce que les travaux de ce champ soient tous formalisés pour éviter les trop fréquentes démonstrations fausses, que même les meilleurs spécialistes avaient des difficultés à éliminer (voir dans cette rubrique « Les mathématiques au péril de la contradiction », *Pour la Science*, avril 2019).

APPLICATION À LA PREUVE ONTOLOGIQUE DE L'EXISTENCE DE DIEU

Un cas récent assez étrange et amusant a mis en évidence l'intérêt des assistants de preuve, qui servent maintenant à repérer et corriger des erreurs même dans des raisonnements philosophiques controversés.

Il est arrivé à Gödel, considéré comme le plus grand logicien ayant existé, de se tromper: en 1970, il soumit à Alfred Tarski, pour publication dans *Proceedings of The National Academy of Sciences*, une démonstration s'appuyant sur des axiomes nouveaux que l'hypothèse du continu était fausse. La preuve, erronée, ne fut jamais publiée.

Mais le cas le plus intéressant d'erreur de Gödel concerne un travail philosophico-logique portant sur la question de savoir si un pur raisonnement logique est susceptible de démontrer l'existence de Dieu. Anselme de Cantorbéry, au XI^e siècle, puis Gottfried Leibniz, au XVII^e siècle, avaient proposé de tels raisonnements utilisant les idées de perfection, de nécessité et d'existence combinées aussi rigoureusement que possible (*voir l'encadré 5*). Il s'agit là de jeux logiques qui présentent l'intérêt de permettre des analyses de concepts, surtout quand on les rend précis en les axiomatisant complètement, ce que Gödel a tenté de faire. Que l'on arrive à la conclusion que Dieu existe, ou que l'on arrive à la conclusion que les modes de raisonnements qu'on veut mettre en œuvre pour le prouver produisent des contradictions ou des énoncés inacceptables, est intéressant sur un plan logique.

Les travaux de Christoph Benz Müller et David Fuenmayor et de quelques chercheurs autour d'eux ont répondu aux questions qu'on pouvait se poser. En utilisant des systèmes de

démonstration et de vérification automatique de preuve, ils ont d'une part établi que le système d'axiomes utilisé par Gödel dans sa preuve ontologique était contradictoire, ce qui bien sûr retire toute valeur à son raisonnement. Cependant, en étudiant certaines variantes proposées par exemple par Dana Scott ou Melvin Fitting, ils ont pu valider ces variantes du raisonnement – qui, cette fois, s'appuient sur des systèmes ne produisant pas d'absurdités manifestes et aboutissent sans commettre de faute de raisonnement à la conclusion que Dieu existe, du moins un dieu tel que les axiomes adoptés l'envisagent. On dispose donc de systèmes d'axiomes passés dans la moulinette informatique dont on est certain qu'ils ne sont pas idiots, et qui laissent la place à des raisonnements sur l'existence de Dieu!

Ces exemples d'utilisation de la logique formelle et de systèmes informatiques de validation pour avancer sur des questions de nature philosophique doivent encourager les philosophes à rendre aussi précis que possible leurs hypothèses et le déroulement de leurs raisonnements. Selon Christoph Benz Müller, ces travaux ouvrent « de nouvelles perspectives pour une philosophie théorique assistée par ordinateur. La discussion critique des concepts, définitions et axiomes sous-jacents reste de la responsabilité des humains, mais l'ordinateur peut aider à construire et à vérifier que les arguments logiques sont rigoureusement corrects. En cas de conflit, l'ordinateur tranchera entre les arguments contradictoires et satisfera la recommandation de Leibniz *Calculus* ("Calculons!") ». Le rêve d'une langue parfaite, la *Characteristica Universalis*, que Leibniz voulait créer, où le vrai et le faux seraient identifiables par un simple calcul, est donc en partie réalisé.

PAS DE PROGRÈS SANS RISQUE...

C'est parce que les mathématiques progressent et qu'elles entrent dans des domaines d'une complexité bien supérieure à tout ce qu'on a connu aux siècles précédents qu'elles prennent des risques. La volonté d'aller le plus loin possible crée un danger qu'il faut accepter, à la condition de mettre en œuvre tout ce qui peut le limiter.

Sur la frontière entre le vrai et le faux, le terrain devient incertain; les mathématiques doivent donc inventer et perfectionner leurs outils de contrôle et, dans certains domaines, les utiliser systématiquement. Les erreurs qui se produisent sont non pas la preuve d'un risque général et croissant auquel les mathématiques seraient soumises, car les garanties se renforcent dans la partie centrale qui s'étend, mais la manifestation de la vitalité d'une science curieuse et assoiffée, et qui depuis toujours explore et défriche sans répit des terres nouvelles. ■

BIBLIOGRAPHIE

C. Benz Müller et D. Fuenmayor, **Computer-supported analysis of positive properties, ultrafilters and modal collapse in variants of Gödel's ontological argument**, *Bulletin of the Section of Logic*, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1910.08955>).

D. Fuenmayor et C. Benz Müller, **Automating emendations of the ontological argument in intensional higher-order modal logic**, *Joint German/Austrian Conference on Artificial Intelligence*, Springer, 2017 (<https://bit.ly/33ts05Z>).

C. Benz Müller et B. Woltzenlogel Paleo, **The inconsistency in Gödel's ontological argument : A success story for AI in metaphysics**, *Proceedings of the 25th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2016 (<https://bit.ly/3gszT0N>).

J.-P. Delahaye, **Comment vérifier les longues démonstrations**, *Pour la Science*, n° 452, juin 2015.

A. Posamentier et I. Lehmann, **Magnificent Mistakes in Mathematics**, Prometheus Books, 2013.

M. Lecat, **Erreurs de mathématiciens, des origines à nos jours**, Castaigne, 1935.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*



Le clip *Fuchsia*, de 1968,
en platine, or jaune
«serti mystérieux» rubis
et diamants.

L'EXPRESSION DES GEMMES

De leur formation il y a plusieurs millions d'années jusqu'à leur mise en majesté sur des bijoux, une exposition qui brille de mille feux retrace l'histoire des pierres précieuses.



La légende assure qu'aux temps immémoriaux un aigle géant, survolant le monde, trouva une pierre énorme, qu'il prit d'abord pour un quartier de chair vive tant elle avait la couleur du sang le plus généreux, le plus pur. C'était une sorte de soleil empourpré. L'aigle emporta le premier rubis de l'univers sur la cime la plus aiguë de la vallée. Ainsi naquit Mogok.» Et ainsi parle Joseph Kessel, dans *La Vallée des rubis*, paru en 1955. Située à près de 1200 mètres d'altitude, la Mogok en

question est une cité à 200 kilomètres au nord de Mandalay, ancienne capitale du Myanmar. Et c'est en effet un des hauts lieux de la gemmologie en ce qu'il livre, depuis des siècles, de nombreux rubis de très grande qualité.

On peut en voir quelques beaux échantillons à l'exposition «Pierres précieuses», organisée en collaboration entre le Muséum à Paris et le célèbre bijoutier Van Cleef & Arpels. Le visiteur est invité à plonger au cœur de la planète, à la découverte des cycles géodynamiques et des phénomènes naturels qui président à la formation des gemmes jusqu'à leur mise en valeur sur des bagues, des colliers, des boucles d'oreille...

Attardons-nous sur les rubis de Mogok. Tout commence il y a plus de 250 millions d'années, alors que la région de l'actuel Myanmar n'était que lagons et deltas riches en sels, où les sédiments se

sont accumulés au fond et sont mêlés aux dépôts calcaires d'origine marine. Lorsque la plaque de l'Inde a heurté l'Asie, et donné naissance à l'Himalaya il y a quelque 50 millions d'années (le processus se poursuit toujours), les empilements ont été chauffés par le métamorphisme local. Conséquence, les calcaires sont devenus du marbre (composé de calcite, CaCO_3), tandis que, soumis à de fortes pressions et températures, les sels ont fondu et ont réagi avec le marbre environnant, qui contenait notamment de l'aluminium et du chrome. Ils se sont alors transformés en rubis parmi les plus beaux du monde, car de couleur homogène. Un tel rubis brut est présenté dans l'exposition, prisonnier de sa gangue de marbre «bleu» de Mogok (voir la photo en haut).

Minéralogiquement parlant, un rubis est un corindon, c'est-à-dire un oxyde d'aluminium (Al_2O_3) dans lequel certains

Un rubis brut dans sa gangue de marbre, extrait des mines de Mogok, au Myanmar.



Le clip *Pivoine*, de 1937, en platine, or jaune, «serti mystérieux» rubis et diamants.

ions aluminium sont remplacés par d'autres éléments, faisant du minéral des gemmes colorées. Dans le cas du rubis, c'est le chrome, ce même élément donnant à l'émeraude sa couleur... verte! La différence résulterait de champs électriques créés autour des atomes de chrome par les atomes d'oxygène dans le rubis, ce phénomène n'ayant pas lieu dans l'émeraude. Ce faisant, les deux minéraux n'absorbent pas la lumière de la même façon.

Récoltées à Mogok dans des graviers alluvionnaires issus des calcaires métamorphisés, les gemmes sont ensuite taillées et confiées aux mains expertes des joailliers. Ils peuvent en faire par exemple le clip *Fuchsia* de 1968 ou le clip *Pivoine* de 1937 (voir les photos ci-dessus). C'est une autre science qui se déploie ici, notamment celle du «serti mystérieux». De quoi s'agit-il?

Ce procédé, breveté en 1933 par Van Cleef & Arpels, permet de fixer les pierres facettées, principalement les rubis, sur une fine résille d'or de 200 micromètres d'épaisseur, sans monture ni griffe apparente. Depuis, cette pratique a été améliorée et déclinée en deux nouvelles techniques: le serti mystérieux Navette, qui accentue le volume grâce au bombé des pierres polies en navette, et le serti mystérieux Vitrail, qui joue de la transparence et des reflets des gemmes sans que la monture soit visible.

Entre émerveillement face aux plus belles créations présentées, comme la «table de Mazarin», en marqueterie de pierres représentant fleurs et animaux, *L'Arbre aux tourmalines*, créé par Jean Vendome, ou le collier commandé par la

reine Nazli d'Égypte pour le mariage de sa fille en 1939, et découverte des plus récents travaux en minéralogie et des trésors français, en particulier les deux gros saphirs mis au jour dans le Puy-de-Dôme en 2018, le visiteur ne peut qu'adhérer aux propos de Bruno David, président du Muséum national d'histoire naturelle, selon qui «le dialogue science-esthétique prend avec cette exposition une coloration exceptionnelle». Entre autres, celle du rubis!

Exposition « Pierres précieuses », à la grande galerie de l'Évolution, au Jardin des plantes, à Paris, jusqu'au 14 juin 2021.
<http://bit.ly/MNHN-Rubis>



L'auteur a publié:
Pollock, Turner, Van Gogh, Vermeer et la science...
(Belin, 2018)