

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

DES FONCTIONS MONSTRUEUSES MAIS UTILES

En imaginant des fonctions bizarres et au comportement inhabituel, les mathématiciens mettent à l'épreuve leurs intuitions. Ces fonctions se révèlent aussi pertinentes pour modéliser certains phénomènes naturels.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Les mathématiciens ont longtemps associé l'idée de continuité d'une fonction (et de son graphe) et l'existence de tangentes aux points de son graphe, et ils pensaient que ces tangentes existaient partout hormis en quelques points isolés quand la fonction est continue. André-Marie Ampère tenta en 1806 de le démontrer, mais échoua. En fait, l'hypothèse était fautive : il existe des fonctions continues dont le graphe n'a de tangente en aucun point !

Au début, ces fonctions « monstrueuses » ont gêné les mathématiciens. Ainsi, en 1893, Thomas Stieltjes écrivait à Charles Hermite : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui sont sans dérivée. » Henri Poincaré lui-même n'aimait pas ces fonctions tétalogiques et les considérait comme un jeu stérile et irrespectueux des traditions : « La logique parfois engendre des monstres. On a vu surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées. [...] Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »

Le jugement des mathématiciens a bien changé ! Ils considèrent aujourd'hui que ces fonctions inattendues sont des garde-fous utiles,

car non seulement connaître leur existence nous évite de tenter des démonstrations impossibles, mais elles affinent notre compréhension des concepts de continuité et de dérivabilité.

De plus, ces fonctions monstrueuses sont à l'origine de la géométrie fractale, qui sert à modéliser toutes sortes de phénomènes naturels, le mouvement brownien par exemple. Finalement nous savons maintenant que ces « monstres » sont présents dans l'univers physique et ne sont en rien artificiels. Nous allons en présenter quelques-uns pour le plaisir de l'étonnement.

DISCONTINUITÉ MAXIMALE

La notion de continuité s'envisageait d'abord globalement. Par exemple, les fonctions $x \rightarrow x^2$ ou $x \rightarrow \sin(x)$ sont continues partout où elles sont définies, c'est-à-dire sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Pourtant, en approfondissant notre compréhension, on a découvert que la continuité était une notion ponctuelle : on peut définir la continuité en un point, et en chaque point de son ensemble de définition une fonction peut être continue ou non.

Nous nous limiterons aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et distinguerons parmi les nombres réels les nombres rationnels, de la forme p/q où p et q sont des entiers, comme $0,4=2/5$, et les nombres irrationnels qui ne peuvent se représenter sous cette forme, comme $\sqrt{2}$. La façon la plus simple de définir la continuité est de dire que f est continue au point x si, à chaque fois que >

LA FONCTION POP-CORN DE THOMAE ET LE VERGER D'EUCLIDE

La fonction pop-corn g du mathématicien allemand Carl Thomae est définie pour tout nombre réel x par :

- (1) $g(x) = 0$ si x est irrationnel ;
- (2) si x est rationnel, c'est-à-dire si $x = p/q$ avec p et q entiers sans diviseur commun autre que 1, alors $g(x) = 1/q$.

Cette fonction saute sans cesse de valeurs positives à des valeurs nulles et inversement. Cependant, quand x est proche d'un nombre irrationnel, les fractions p/q ne peuvent pas avoir un petit dénominateur, et donc $1/q$ est de plus en plus petit. En effet, près d'un irrationnel x , arrive un moment où un rationnel ne peut avoir un dénominateur 2, car x se trouve à la fois éloigné de 0, $1/2$, 1, $3/2$, etc. De même, arrive un moment où un

rationnel ne peut avoir pour dénominateur 3, etc. Donc quand une suite de rationnels s'approche d'un irrationnel, les dénominateurs augmentent.

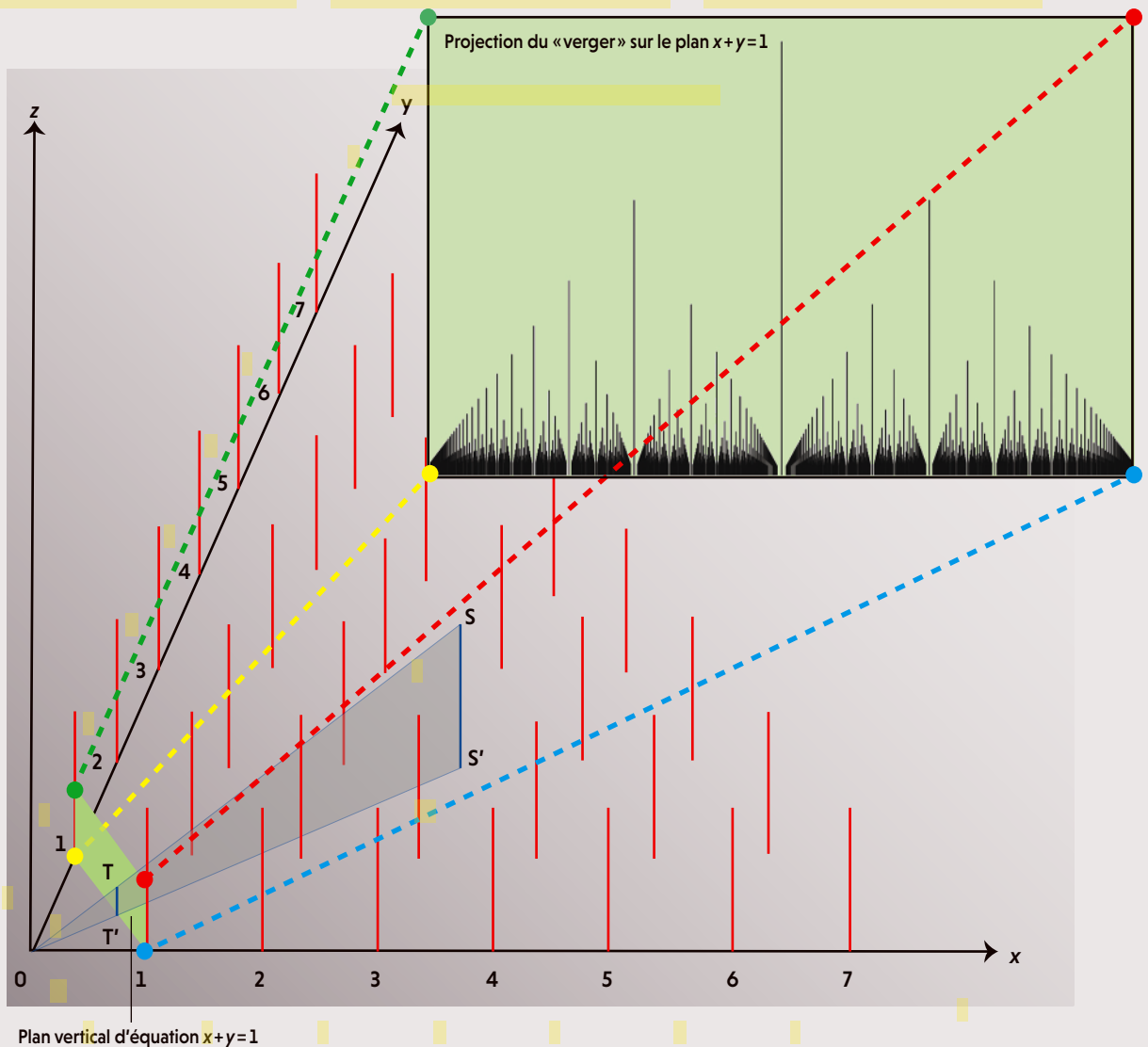
La conséquence est que g est continue en x si x est irrationnel. La fonction g passe donc sans cesse de points où elle est continue (les irrationnels) à des points où elle est discontinue (les rationnels) et inversement.

On rencontre cette fonction en physique et en géométrie. Le « verger d'Euclide » est un plan infini couvert d'arbres (des segments de longueur 1) placés verticalement aux points de coordonnées (p, q) du plan $z = 0$. Projets chaque segment-arbre SS' sur le plan vertical d'équation $x + y = 1$ par une homothétie de

centre $(0, 0)$ et de rapport $p + q$. La longueur de la projection TT' de l'arbre SS' est $1/(p + q)$.

Tout couple d'entiers positifs (p, q) peut s'écrire sous la forme $(n, m - n)$, n et m positifs, en prenant $n = p$ et $m = p + q$. Donc, en considérant tous les arbres du verger d'Euclide en position $(n, m - n)$, on a bien tous les arbres et la projection de tous ces arbres sur le plan $x + y = 1$ donne tous les points du graphe de la fonction $g(x)$, la hauteur $1/m$ de l'arbre étant la valeur de la fonction g pour les x rationnels. Les points du graphe de g pour les x irrationnels sont sur l'axe des x .

Regarder le verger d'Euclide sur le plan d'équation $x + y = 1$ est donc équivalent à regarder le graphe de la fonction g de Carl Thomae !



➤ l'on dispose d'une suite (x_n) qui converge vers x , alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$: si y s'approche de x , alors $f(y)$ s'approche de $f(x)$. Puisque la notion est définie en tout point, vient la question : se peut-il qu'une fonction soit l'opposée d'une fonction continue en tout point, c'est-à-dire qu'elle ne soit continue en aucun point ?

Oui, c'est possible. Si l'on considère la fonction f définie par $f(x)=1$ si x est rationnel, $f(x)=0$ si x est irrationnel, on en a un exemple. Cette fonction est nommée « fonction de Dirichlet » en l'honneur du mathématicien prussien Gustav Lejeune Dirichlet qui l'envisagea en 1829. Elle n'est pas continue en x si x est rationnel, car $f(x)=1$ et donc en s'approchant de x par des y irrationnels, $f(y)$ vaut 0 et ne s'approche pas de $f(x)$. Et elle n'est pas continue en x si x est irrationnel car $f(x)=0$, donc en s'approchant de x par des rationnels y , $f(y)$ qui vaut 1 ne s'approche pas de $f(x)$. La fonction saute sans cesse de 0 à 1 et de 1 à 0, car entre deux rationnels il y a toujours des irrationnels, et entre deux irrationnels, il y a toujours des rationnels.

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si tout point de $\mathbb{R}$ peut-être approché avec autant de précision qu'on le veut

par des points de E . L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$, mais c'est aussi le cas de son complémentaire, l'ensemble des irrationnels. Il en va de même pour l'ensemble des nombres décimaux (ceux dont l'écriture en base 10 est finie, comme 0,25 ou 7,4321). Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, et si le complémentaire de E est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$, alors toute fonction qui vaut 1 sur E et 0 ailleurs sera, comme la fonction de Dirichlet, discontinue partout.

UNE FONCTION CONTINUE EN TOUT POINT IRRATIONNEL ET DISCONTINUE AILLEURS

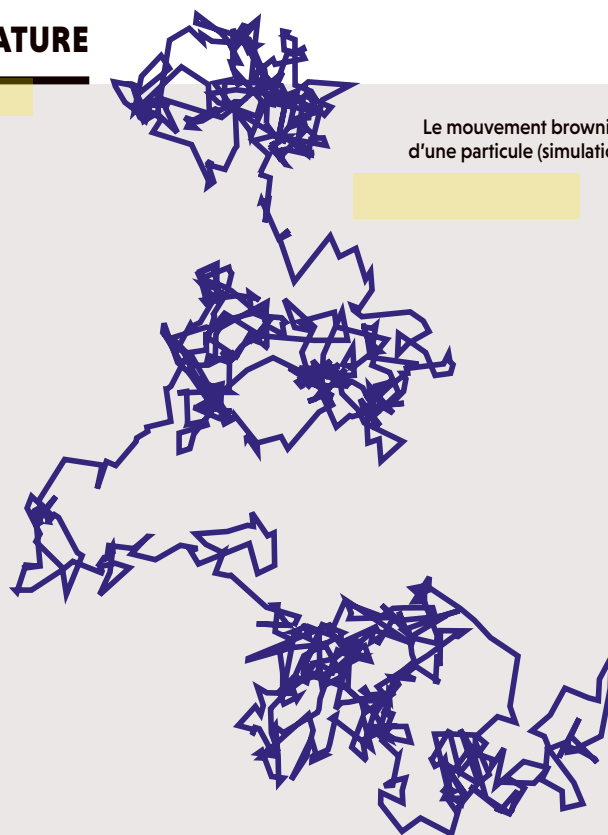
Une seconde question un peu plus subtile va produire un résultat vraiment surprenant : les points où une fonction est continue sont-ils groupés ? On pourrait penser que oui, mais c'est faux. En effet, il existe une fonction g qui est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel. Elle saute sans cesse de la continuité à la non-continuité. Entre deux points où cette fonction g est continue, aussi proches soient-ils, il y a toujours un point où la fonction est discontinue, et inversement.

2

DES MONSTRES RENCONTRÉS DANS LA NATURE

Les fonctions monstrueuses ont étonné les mathématiciens du XIX^e siècle qui les ont découvertes, et parfois détestées car elles semblaient ne pas se plier à ce qu'on attend des bonnes fonctions rencontrées dans la nature. Cependant, même si au départ ces fonctions tératologiques servaient uniquement en mathématiques à comprendre ce qui résulte des définitions et ce qui n'en résulte pas, on s'est aperçu dans un second temps qu'elles sont aussi utiles pour modéliser le monde physique. Jean Perrin fut le premier, en 1913, à percevoir et défendre cet intérêt : « Si les fonctions à dérivée sont les plus simples, les plus faciles à traiter, elles sont pourtant l'exception. Ou, si l'on préfère en langage géométrique, les courbes qui n'ont pas de tangente sont la règle, et les courbes bien régulières, telles que le cercle, sont des cas fort intéressants mais très particuliers. [...] Mettant l'œil au microscope, nous observons le mouvement brownien qui agite une toute petite particule en suspension dans un fluide, et pour fixer une tangente à sa trajectoire, nous devrions trouver une limite au moins approximative à la direction de la droite qui joint les positions de cette particule en deux instants successifs très rapprochés. Or, tant que l'on peut faire l'expérience, cette direction varie follement lorsque l'on fait décroître la durée qui sépare ces deux instants. En sorte que ce qui est suggéré par cette étude à l'observateur sans préjugé, c'est encore la fonction sans dérivée, et pas du tout la courbe avec tangente. »

Benoît Mandelbrot a défendu cette idée d'une géométrie incluant ces courbes irrégulières sans tangente et il a démontré qu'on en rencontrait partout, en physique, en économie, en biologie...



Le mouvement brownien
d'une particule (simulation)

3

L'ESCALIER DU DIABLE

La fonction g qui réalise cet exploit a été proposée en 1875 par le mathématicien allemand Carl Johannes Thomae. Parfois dénommée «fonction pop-corn» à cause du dessin de son graphe (voir l'encadré 1), elle est définie par :

$g(x) = 0$ si x est irrationnel ;

$g(x) = 1/q$ si x est rationnel avec $x = p/q$, où p et q sont des entiers sans diviseur commun autre que 1.

Autrement dit, quand x est rationnel, pour trouver q , on simplifie d'abord le plus possible x . Voici deux exemples : $g(6/9) = g(2/3) = 1/3$; $g(80/100) = g(8/10) = g(4/5) = 1/5$.

La continuité en x irrationnel est facile à comprendre :

a) Quand tous les y_n sont irrationnels et que les valeurs y_n s'approchent d'un nombre irrationnel x , il y a continuité puisque $g(y_n) = 0 = g(x)$.

b) Quand tous les y_n sont rationnels (donc de la forme p/q) et s'approchent d'un nombre irrationnel x , alors plus y est proche de x , plus il faut utiliser des fractions ayant un grand dénominateur q , et donc $g(p/q) = 1/q$ tend vers 0.

c) Quand y s'approche d'un nombre irrationnel x en utilisant à la fois des rationnels et des irrationnels, on a pour $g(y)$ un mélange de 0 et de $1/q$ qui tendent vers 0, et donc $g(y)$ tend vers 0.

Quant à la discontinuité de g en un point rationnel $x = p/q$, elle est évidente, car $g(x) = 1/q > 0$ et il y a, aussi près de x qu'on le souhaite, des irrationnels y pour lesquels $g(y) = 0$.

La fonction de Thomae paraît artificielle. Ce n'est pourtant pas le cas, car c'est son graphe que l'on voit quand on regarde le «verger d'Euclide».

Ce verger est l'idée mathématique d'un champ infini planté d'arbres régulièrement espacés de même hauteur : en chaque point à coordonnées entières, il y a un arbre modélisé par un segment de droite verticale de longueur 1, le bas du segment étant sur le plan horizontal d'altitude 0. Imaginons que l'on place l'œil au niveau du sol au point (0, 0) et que l'on regarde le verger d'Euclide. Certains arbres en cachent d'autres. Par exemple, l'arbre en (1, 1) cache l'arbre en (2, 2), l'arbre en (3, 3), etc. En fait, les seuls arbres que l'on voit sont ceux positionnés en (p, q) où p et q sont sans diviseur commun autre que 1. Ce que l'on voit en projetant sur le plan vertical perpendiculaire à la première diagonale (ce plan a pour équation $x + y = 1$) est alors le graphe de la fonction g de Thomae (voir l'encadré 1).

Des exemples de fonctions qui ressemblent à celle de Thomae ont été rencontrés en physique (voir les articles de Sergei Nechaev et Kirill Polovnikov en bibliographie), ce qui prouve encore une fois que les fonctions monstres ne sont pas seulement des lubies de mathématiciens désœuvrés.

La fonction h de Cantor ou «escalier du diable» est définie comme une limite de fonctions continues. Cette limite est elle-même continue en tout point de l'intervalle $[0, 1]$. Son étrange propriété est d'avoir une dérivée nulle sur tout l'intervalle $[0, 1]$ sauf aux points de l'ensemble triadique de Cantor (les six premières itérations de cet ensemble de Cantor sont représentées en a), qui est négligeable, ce qui veut dire qu'il peut être enfermé dans des intervalles dont la longueur cumulée est aussi petite que souhaité. Bien que de dérivée presque partout nulle,

la fonction de Cantor monte sans en avoir l'air de 0 à 1 (b).

Francesco De Comité, du laboratoire Cristal à l'université de Lille, a tiré de l'escalier du diable une belle sculpture. Il a considéré toutes les variantes qu'on obtient pour h en enlevant de manière répétée $x\%$ (au lieu de un tiers) au centre des intervalles utilisés dans la construction de h . Les courbes obtenues ont été mises côte à côte, ce qui donne une surface, et donc la sculpture c. En coupant et en ouvrant la sculpture pour qu'on aperçoive bien la courbe pour un tiers, on a le résultat final d.

