

# 3

## L'ESCALIER DU DIABLE

La fonction  $g$  qui réalise cet exploit a été proposée en 1875 par le mathématicien allemand Carl Johannes Thomae. Parfois dénommée « fonction pop-corn » à cause du dessin de son graphe (voir l'encadré 1), elle est définie par :

$g(x) = 0$  si  $x$  est irrationnel ;

$g(x) = 1/q$  si  $x$  est rationnel avec  $x = p/q$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers sans diviseur commun autre que 1.

Autrement dit, quand  $x$  est rationnel, pour trouver  $q$ , on simplifie d'abord le plus possible  $x$ . Voici deux exemples :  $g(6/9) = g(2/3) = 1/3$  ;  $g(80/100) = g(8/10) = g(4/5) = 1/5$ .

La continuité en  $x$  irrationnel est facile à comprendre :

a) Quand tous les  $y_n$  sont irrationnels et que les valeurs  $y_n$  s'approchent d'un nombre irrationnel  $x$ , il y a continuité puisque  $g(y_n) = 0 = g(x)$ .

b) Quand tous les  $y_n$  sont rationnels (donc de la forme  $p/q$ ) et s'approchent d'un nombre irrationnel  $x$ , alors plus  $y$  est proche de  $x$ , plus il faut utiliser des fractions ayant un grand dénominateur  $q$ , et donc  $g(p/q) = 1/q$  tend vers 0.

c) Quand  $y$  s'approche d'un nombre irrationnel  $x$  en utilisant à la fois des rationnels et des irrationnels, on a pour  $g(y)$  un mélange de 0 et de  $1/q$  qui tendent vers 0, et donc  $g(y)$  tend vers 0.

Quant à la discontinuité de  $g$  en un point rationnel  $x = p/q$ , elle est évidente, car  $g(x) = 1/q > 0$  et il y a, aussi près de  $x$  qu'on le souhaite, des irrationnels  $y$  pour lesquels  $g(y) = 0$ .

La fonction de Thomae paraît artificielle. Ce n'est pourtant pas le cas, car c'est son graphe que l'on voit quand on regarde le « verger d'Euclide ».

Ce verger est l'idée mathématique d'un champ infini planté d'arbres régulièrement espacés de même hauteur : en chaque point à coordonnées entières, il y a un arbre modélisé par un segment de droite verticale de longueur 1, le bas du segment étant sur le plan horizontal d'altitude 0. Imaginons que l'on place l'œil au niveau du sol au point (0, 0) et que l'on regarde le verger d'Euclide. Certains arbres en cachent d'autres. Par exemple, l'arbre en (1, 1) cache l'arbre en (2, 2), l'arbre en (3, 3), etc. En fait, les seuls arbres que l'on voit sont ceux positionnés en  $(p, q)$  où  $p$  et  $q$  sont sans diviseur commun autre que 1. Ce que l'on voit en projetant sur le plan vertical perpendiculaire à la première diagonale (ce plan a pour équation  $x + y = 1$ ) est alors le graphe de la fonction  $g$  de Thomae (voir l'encadré 1).

Des exemples de fonctions qui ressemblent à celle de Thomae ont été rencontrés en physique (voir les articles de Sergei Nechaev et Kirill Polovnikov en bibliographie), ce qui prouve encore une fois que les fonctions monstres ne sont pas seulement des lubies de mathématiciens désœuvrés.

La fonction  $h$  de Cantor ou « escalier du diable » est définie comme une limite de fonctions continues. Cette limite est elle-même continue en tout point de l'intervalle  $[0, 1]$ . Son étrange propriété est d'avoir une dérivée nulle sur tout l'intervalle  $[0, 1]$  sauf aux points de l'ensemble triadique de Cantor (les six premières itérations de cet ensemble de Cantor sont représentées en a), qui est négligeable, ce qui veut dire qu'il peut être enfermé dans des intervalles dont la longueur cumulée est aussi petite que souhaité. Bien que de dérivée presque partout nulle,

la fonction de Cantor monte sans en avoir l'air de 0 à 1 (b).

Francesco De Comité, du laboratoire Cristal à l'université de Lille, a tiré de l'escalier du diable une belle sculpture. Il a considéré toutes les variantes qu'on obtient pour  $h$  en enlevant de manière répétée  $x\%$  (au lieu de un tiers) au centre des intervalles utilisés dans la construction de  $h$ . Les courbes obtenues ont été mises côte à côte, ce qui donne une surface, et donc la sculpture c. En coupant et en ouvrant la sculpture pour qu'on aperçoive bien la courbe pour un tiers, on a le résultat final d.

