

3

L'ESCALIER DU DIABLE

La fonction g qui réalise cet exploit a été proposée en 1875 par le mathématicien allemand Carl Johannes Thomae. Parfois dénommée «fonction pop-corn» à cause du dessin de son graphe (voir l'encadré 1), elle est définie par :

$g(x) = 0$ si x est irrationnel ;

$g(x) = 1/q$ si x est rationnel avec $x = p/q$, où p et q sont des entiers sans diviseur commun autre que 1.

Autrement dit, quand x est rationnel, pour trouver q , on simplifie d'abord le plus possible x . Voici deux exemples : $g(6/9) = g(2/3) = 1/3$; $g(80/100) = g(8/10) = g(4/5) = 1/5$.

La continuité en x irrationnel est facile à comprendre :

a) Quand tous les y_n sont irrationnels et que les valeurs y_n s'approchent d'un nombre irrationnel x , il y a continuité puisque $g(y_n) = 0 = g(x)$.

b) Quand tous les y_n sont rationnels (donc de la forme p/q) et s'approchent d'un nombre irrationnel x , alors plus y est proche de x , plus il faut utiliser des fractions ayant un grand dénominateur q , et donc $g(p/q) = 1/q$ tend vers 0.

c) Quand y s'approche d'un nombre irrationnel x en utilisant à la fois des rationnels et des irrationnels, on a pour $g(y)$ un mélange de 0 et de $1/q$ qui tendent vers 0, et donc $g(y)$ tend vers 0.

Quant à la discontinuité de g en un point rationnel $x = p/q$, elle est évidente, car $g(x) = 1/q > 0$ et il y a, aussi près de x qu'on le souhaite, des irrationnels y pour lesquels $g(y) = 0$.

La fonction de Thomae paraît artificielle. Ce n'est pourtant pas le cas, car c'est son graphe que l'on voit quand on regarde le «verger d'Euclide».

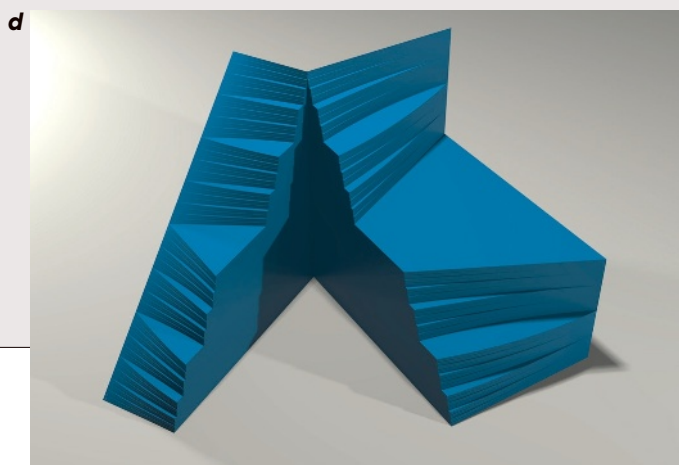
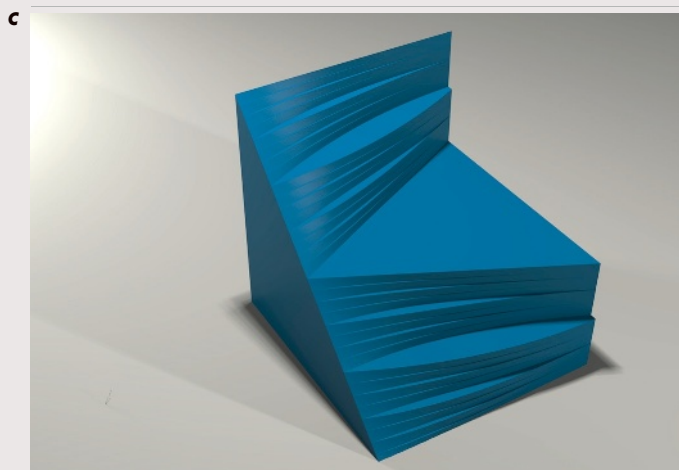
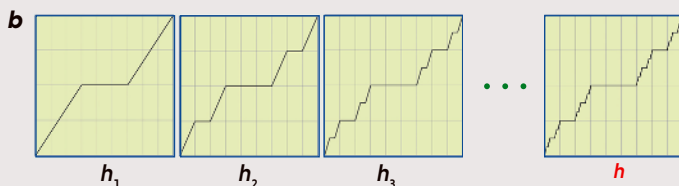
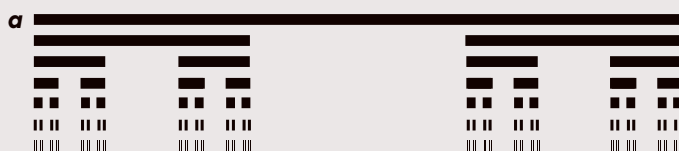
Ce verger est l'idée mathématique d'un champ infini planté d'arbres régulièrement espacés de même hauteur : en chaque point à coordonnées entières, il y a un arbre modélisé par un segment de droite verticale de longueur 1, le bas du segment étant sur le plan horizontal d'altitude 0. Imaginons que l'on place l'œil au niveau du sol au point (0, 0) et que l'on regarde le verger d'Euclide. Certains arbres en cachent d'autres. Par exemple, l'arbre en (1, 1) cache l'arbre en (2, 2), l'arbre en (3, 3), etc. En fait, les seuls arbres que l'on voit sont ceux positionnés en (p, q) où p et q sont sans diviseur commun autre que 1. Ce que l'on voit en projetant sur le plan vertical perpendiculaire à la première diagonale (ce plan a pour équation $x + y = 1$) est alors le graphe de la fonction g de Thomae (voir l'encadré 1).

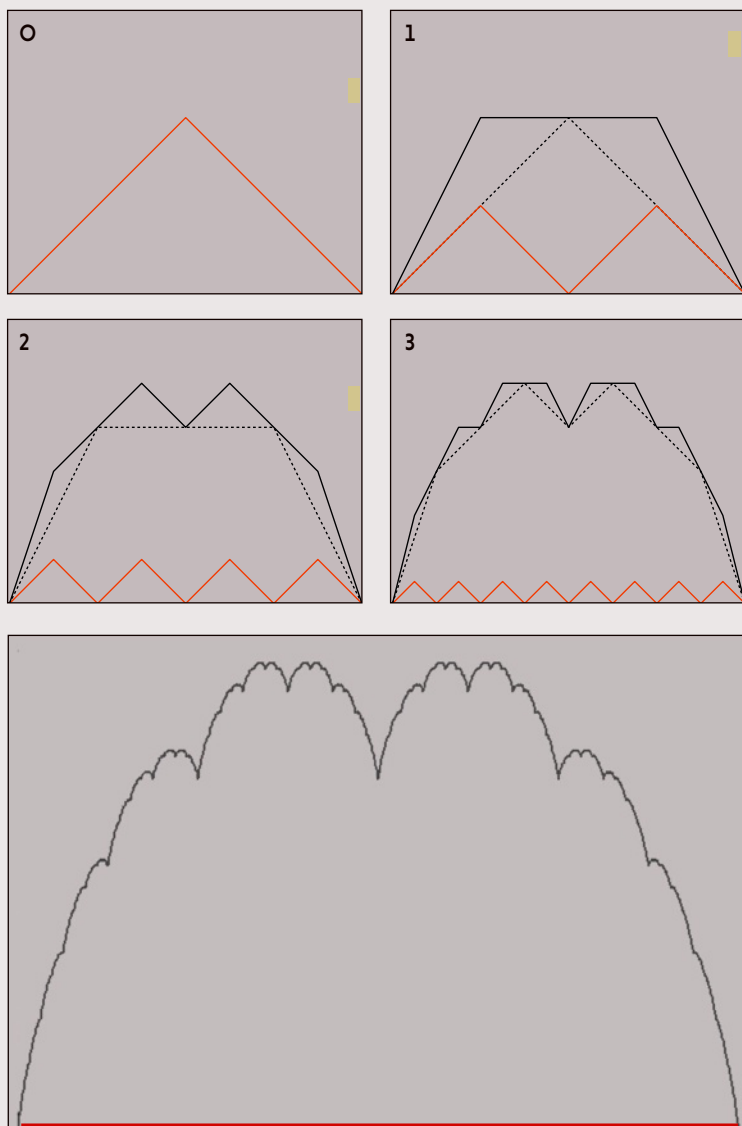
Des exemples de fonctions qui ressemblent à celle de Thomae ont été rencontrés en physique (voir les articles de Sergei Nechaev et Kirill Polovnikov en bibliographie), ce qui prouve encore une fois que les fonctions monstres ne sont pas seulement des lubies de mathématiciens désœuvrés.

La fonction h de Cantor ou «escalier du diable» est définie comme une limite de fonctions continues. Cette limite est elle-même continue en tout point de l'intervalle $[0, 1]$. Son étrange propriété est d'avoir une dérivée nulle sur tout l'intervalle $[0, 1]$ sauf aux points de l'ensemble triadique de Cantor (les six premières itérations de cet ensemble de Cantor sont représentées en a), qui est négligeable, ce qui veut dire qu'il peut être enfermé dans des intervalles dont la longueur cumulée est aussi petite que souhaité. Bien que de dérivée presque partout nulle,

la fonction de Cantor monte sans en avoir l'air de 0 à 1 (b).

Francesco De Comité, du laboratoire Cristal à l'université de Lille, a tiré de l'escalier du diable une belle sculpture. Il a considéré toutes les variantes qu'on obtient pour h en enlevant de manière répétée $x\%$ (au lieu de un tiers) au centre des intervalles utilisés dans la construction de h . Les courbes obtenues ont été mises côte à côte, ce qui donne une surface, et donc la sculpture c. En coupant et en ouvrant la sculpture pour qu'on aperçoive bien la courbe pour un tiers, on a le résultat final d.





LA COURBE DU BLANC-MANGER

La fonction du blanc-manger du mathématicien japonais Teiji Takagi est un exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part. Elle est définie comme la limite de fonctions linéaires par morceaux, chacune somme de fonctions très simples (graphes ci-dessus, où la fonction représentée en rouge est additionnée à chaque étape). Le nombre de cassures (le nombre de points où il n'y a pas de tangente) des fonctions de la suite augmente d'une fonction à la suivante.

À la limite, la fonction obtenue est toujours continue, mais n'a de dérivée en aucun point. Il existe d'autres suites de fonctions de ce type, dont celle proposée par Weierstrass, qui sont toutes continues et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$, et dont la limite est une fonction continue mais nulle part dérivable. Inversement, on démontre que toute fonction continue dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier peut être définie comme la limite d'une suite de fonctions continues et nulle part dérivables.

> Les fonctions nulle part continues sont utiles, mais les fonctions continues partout le sont plus encore ! On a le sentiment d'en avoir une bonne compréhension. Est-ce certain ?

Avant d'aborder l'exemple de « l'escalier du diable », expliquons ce que signifie l'expression mathématique « presque partout ». L'épaisseur ou la mesure d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est sa longueur, ou la longueur cumulée de ses différentes composantes. Un intervalle a pour mesure sa longueur et une réunion d'intervalles disjoints a pour mesure la somme des longueurs des intervalles constitutifs. Dans les cas compliqués, on procède en enfermant E dans une liste d'intervalles dont on évalue la longueur totale en essayant de la rendre aussi petite que possible. Si l'on arrive à faire que cette longueur totale soit aussi proche de 0 que possible, on dit que E est « négligeable » ou de mesure nulle. Une propriété qui est vraie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle est dite « vraie presque partout ».

Un ensemble infini E est dénombrable si l'on sait numérotter ses éléments : $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle car, en enfermant E dans les intervalles $[e_0 - 1/2^n, e_0 + 1/2^n], [e_1 - 1/4^n, e_1 + 1/4^n], \dots, [e_k - 1/2^k, e_k + 1/2^k], \dots$, la longueur totale des intervalles utilisés est $(1/n)[1 + 1/2 + 1/4 + \dots] = 2/n$, ce qui peut être rendu aussi petit qu'on le désire. Ce résultat du mathématicien français Émile Borel (1871-1956) montre que les nombres rationnels, bien que denses dans $\mathbb{R}$, forment quand même un ensemble négligeable !

L'ensemble triadique de Cantor, notons-le C , est ce qui reste quand, partant de l'intervalle $[0, 1]$, on en enlève le tiers médian, ce qui donne $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, puis qu'on recommence à enlever les tiers médians des deux intervalles obtenus, ce qui donne quatre intervalles de longueur $1/9$ chacun, sur lesquels on recommence l'opération, et ainsi de suite. Cet ensemble C est de mesure nulle car la longueur totale est $2/3$ après une opération, $4/9$ après deux opérations, $\dots, (2/3)^k$ après k opérations : la longueur totale tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Cette mesure nulle signifie que le complémentaire de C dans l'intervalle $[0, 1]$ a pour mesure 1. En clair, l'ensemble C est négligeable et son complémentaire est l'intervalle $[0, 1]$ à très peu de choses près.

MONTÉE INSENSIBLE

La « fonction de Cantor » h que l'on va définir, et dont le graphe est surnommé « l'escalier du diable », est continue. Elle passe continûment de 0 à 1 : $h(0) = 0, h(1) = 1$. Elle monte et pourtant elle a une dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble C de Cantor, donc presque partout. Sur chacun des intervalles que l'on retire en construisant C , la fonction h est constante. Cette fonction a été découverte