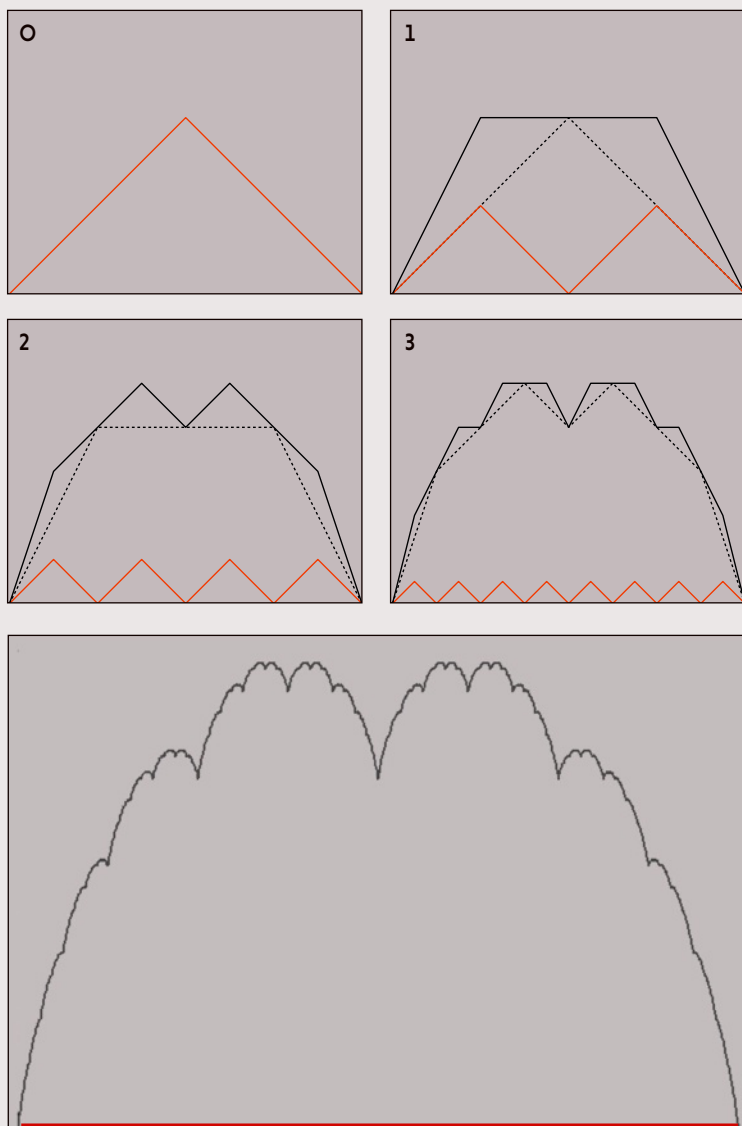




LA COURBE DU BLANC-MANGER

4

La fonction du blanc-manger du mathématicien japonais Teiji Takagi est un exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part. Elle est définie comme la limite de fonctions linéaires par morceaux, chacune somme de fonctions très simples (graphes ci-dessus, où la fonction représentée en rouge est additionnée à chaque étape). Le nombre de cassures (le nombre de points où il n'y a pas de tangente) des fonctions de la suite augmente d'une fonction à la suivante.

À la limite, la fonction obtenue est toujours continue, mais n'a de dérivée en aucun point. Il existe d'autres suites de fonctions de ce type, dont celle proposée par Weierstrass, qui sont toutes continues et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$, et dont la limite est une fonction continue mais nulle part dérivable. Inversement, on démontre que toute fonction continue dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier peut être définie comme la limite d'une suite de fonctions continues et nulle part dérivables.

> Les fonctions nulle part continues sont utiles, mais les fonctions continues partout le sont plus encore ! On a le sentiment d'en avoir une bonne compréhension. Est-ce certain ?

Avant d'aborder l'exemple de « l'escalier du diable », expliquons ce que signifie l'expression mathématique « presque partout ». L'épaisseur ou la mesure d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est sa longueur, ou la longueur cumulée de ses différentes composantes. Un intervalle a pour mesure sa longueur et une réunion d'intervalles disjoints a pour mesure la somme des longueurs des intervalles constitutifs. Dans les cas compliqués, on procède en enfermant E dans une liste d'intervalles dont on évalue la longueur totale en essayant de la rendre aussi petite que possible. Si l'on arrive à faire que cette longueur totale soit aussi proche de 0 que possible, on dit que E est « négligeable » ou de mesure nulle. Une propriété qui est vraie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle est dite « vraie presque partout ».

Un ensemble infini E est dénombrable si l'on sait numérotter ses éléments : $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle car, en enfermant E dans les intervalles $[e_0 - 1/2^n, e_0 + 1/2^n], [e_1 - 1/4^n, e_1 + 1/4^n], \dots, [e_k - 1/2^k, e_k + 1/2^k], \dots$, la longueur totale des intervalles utilisés est $(1/n)[1 + 1/2 + 1/4 + \dots] = 2/n$, ce qui peut être rendu aussi petit qu'on le désire. Ce résultat du mathématicien français Émile Borel (1871-1956) montre que les nombres rationnels, bien que denses dans $\mathbb{R}$, forment quand même un ensemble négligeable !

L'ensemble triadique de Cantor, notons-le C , est ce qui reste quand, partant de l'intervalle $[0, 1]$, on en enlève le tiers médian, ce qui donne $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, puis qu'on recommence à enlever les tiers médians des deux intervalles obtenus, ce qui donne quatre intervalles de longueur $1/9$ chacun, sur lesquels on recommence l'opération, et ainsi de suite. Cet ensemble C est de mesure nulle car la longueur totale est $2/3$ après une opération, $4/9$ après deux opérations, $\dots, (2/3)^k$ après k opérations : la longueur totale tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Cette mesure nulle signifie que le complémentaire de C dans l'intervalle $[0, 1]$ a pour mesure 1. En clair, l'ensemble C est négligeable et son complémentaire est l'intervalle $[0, 1]$ à très peu de choses près.

MONTÉE INSENSIBLE

La « fonction de Cantor » h que l'on va définir, et dont le graphe est surnommé « l'escalier du diable », est continue. Elle passe continûment de 0 à 1 : $h(0) = 0, h(1) = 1$. Elle monte et pourtant elle a une dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble C de Cantor, donc presque partout. Sur chacun des intervalles que l'on retire en construisant C , la fonction h est constante. Cette fonction a été découverte