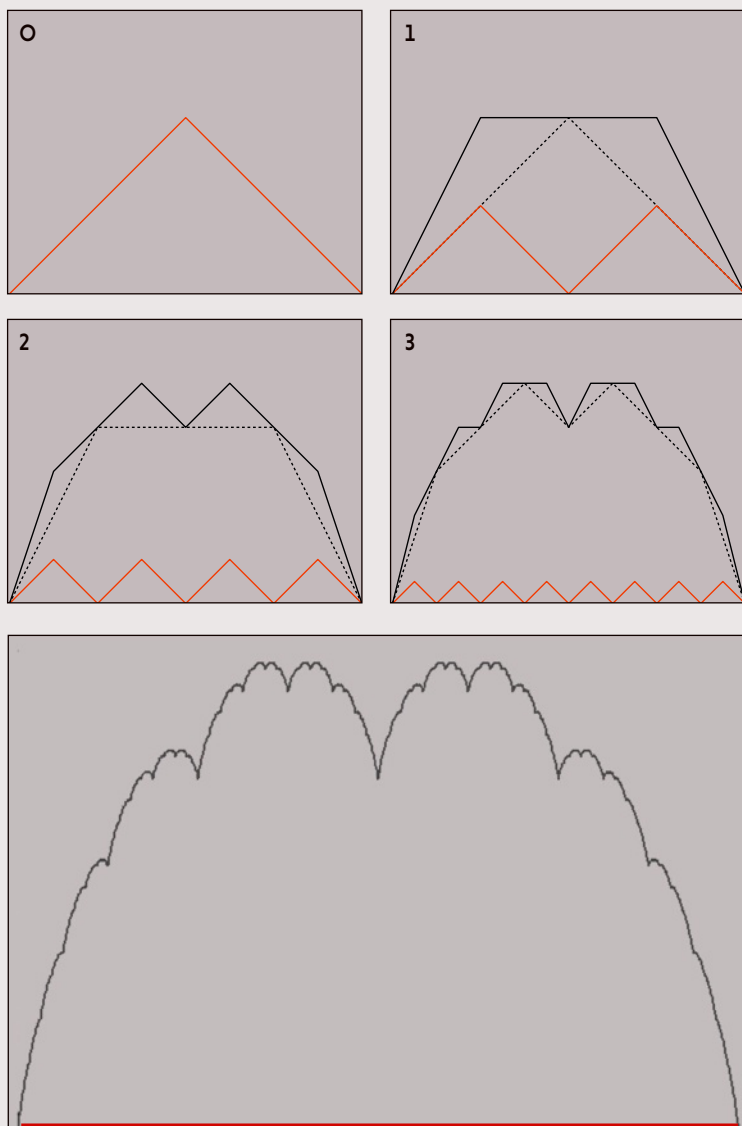




LA COURBE DU BLANC-MANGER

4

La fonction du blanc-manger du mathématicien japonais Teiji Takagi est un exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part. Elle est définie comme la limite de fonctions linéaires par morceaux, chacune somme de fonctions très simples (graphes ci-dessus, où la fonction représentée en rouge est additionnée à chaque étape). Le nombre de cassures (le nombre de points où il n'y a pas de tangente) des fonctions de la suite augmente d'une fonction à la suivante.

À la limite, la fonction obtenue est toujours continue, mais n'a de dérivée en aucun point. Il existe d'autres suites de fonctions de ce type, dont celle proposée par Weierstrass, qui sont toutes continues et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$, et dont la limite est une fonction continue mais nulle part dérivable. Inversement, on démontre que toute fonction continue dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier peut être définie comme la limite d'une suite de fonctions continues et nulle part dérivables.

> Les fonctions nulle part continues sont utiles, mais les fonctions continues partout le sont plus encore ! On a le sentiment d'en avoir une bonne compréhension. Est-ce certain ?

Avant d'aborder l'exemple de « l'escalier du diable », expliquons ce que signifie l'expression mathématique « presque partout ». L'épaisseur ou la mesure d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est sa longueur, ou la longueur cumulée de ses différentes composantes. Un intervalle a pour mesure sa longueur et une réunion d'intervalles disjoints a pour mesure la somme des longueurs des intervalles constitutifs. Dans les cas compliqués, on procède en enfermant E dans une liste d'intervalles dont on évalue la longueur totale en essayant de la rendre aussi petite que possible. Si l'on arrive à faire que cette longueur totale soit aussi proche de 0 que possible, on dit que E est « négligeable » ou de mesure nulle. Une propriété qui est vraie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle est dite « vraie presque partout ».

Un ensemble infini E est dénombrable si l'on sait numérotter ses éléments : $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle car, en enfermant E dans les intervalles $[e_0 - 1/2^n, e_0 + 1/2^n], [e_1 - 1/4^n, e_1 + 1/4^n], \dots, [e_k - 1/2^k, e_k + 1/2^k], \dots$, la longueur totale des intervalles utilisés est $(1/n)[1 + 1/2 + 1/4 + \dots] = 2/n$, ce qui peut être rendu aussi petit qu'on le désire. Ce résultat du mathématicien français Émile Borel (1871-1956) montre que les nombres rationnels, bien que denses dans $\mathbb{R}$, forment quand même un ensemble négligeable !

L'ensemble triadique de Cantor, notons-le C , est ce qui reste quand, partant de l'intervalle $[0, 1]$, on en enlève le tiers médian, ce qui donne $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, puis qu'on recommence à enlever les tiers médians des deux intervalles obtenus, ce qui donne quatre intervalles de longueur $1/9$ chacun, sur lesquels on recommence l'opération, et ainsi de suite. Cet ensemble C est de mesure nulle car la longueur totale est $2/3$ après une opération, $4/9$ après deux opérations, ..., $(2/3)^k$ après k opérations : la longueur totale tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Cette mesure nulle signifie que le complémentaire de C dans l'intervalle $[0, 1]$ a pour mesure 1. En clair, l'ensemble C est négligeable et son complémentaire est l'intervalle $[0, 1]$ à très peu de choses près.

MONTÉE INSENSIBLE

La « fonction de Cantor » h que l'on va définir, et dont le graphe est surnommé « l'escalier du diable », est continue. Elle passe continûment de 0 à 1 : $h(0) = 0, h(1) = 1$. Elle monte et pourtant elle a une dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble C de Cantor, donc presque partout. Sur chacun des intervalles que l'on retire en construisant C , la fonction h est constante. Cette fonction a été découverte

en 1885 par Ludwig Scheeffer, qui était un élève de Georg Cantor.

La définition la plus simple de h consiste à la considérer comme une limite de fonctions $h_1, h_2, h_3, \dots$. La fonction continue h_1 vaut 0 en 0, $1/2$ sur le tiers médian de l'intervalle $[0, 1]$, et 1 en 1, et l'on rejoint ces éléments du graphe par des segments de droite (voir l'encadré 3). La fonction h_2 vaut 0, $1/4, 1/2, 3/4, 1$ pour, respectivement, 0, les intervalles $[1/9, 2/9], [1/3, 2/3], [7/9, 8/9]$, et 1. Et ainsi de suite.

La fonction h est étrange. Elle est continue et presque partout constante (de dérivée nulle), c'est-à-dire partout sauf sur un ensemble négligeable. Et pourtant, elle réussit à monter de 0 à 1: elle ne change de valeur «qu'en douce» sur un ensemble de mesure nulle tout en restant continue!

Bien sûr, toutes sortes de variantes existent de cette fonction, qui par exemple sont continues et dérivables, presque partout de dérivée nulle et qui pourtant montent et descendent, voire passent par tous les points qu'on veut s'ils sont en nombre fini.

Notons que notre intuition que «si une fonction a une dérivée nulle presque partout, alors elle est constante» n'est pas entièrement fausse. On démontre en effet que si une fonction a une dérivée nulle sur un intervalle de $\mathbb{R}$, sauf pour les points d'un ensemble dénombrable, alors elle est constante. Dans le cas de la fonction h de Cantor, la dérivée est nulle sauf sur les points de l'ensemble de Cantor, lequel est certes de mesure nulle, mais est infini non dénombrable.

La fonction h permet d'éviter des erreurs, comme celle du Germano-Balte Axel Harnack qui, en 1882, avait cru démontrer que si une fonction a une dérivée nulle sur un intervalle à l'exception des points d'un ensemble de mesure nulle, alors elle est constante.

FONCTIONS CONTINUES PARTOUT MAIS DÉRIVABLES NULLE PART

Venons-en à la catégorie de monstres qui a le plus étonné les mathématiciens, les fonctions continues partout et dérivables nulle part.

Pour une fonction f , être dérivable en un point x signifie que quand y s'approche de x , le rapport $[f(x) - f(y)]/(x - y)$ tend vers une limite finie, la «dérivée en x ». Le concept est naturel: la dérivée (par rapport au temps) de la distance parcourue par un véhicule à l'instant t est sa vitesse à cet instant. Géométriquement, l'existence d'une dérivée en x de la fonction f signifie que le graphe de f a une tangente en x . S'il y a une cassure du graphe, comme c'est le cas en 0 pour la fonction valeur absolue $|x|$, alors la fonction n'est pas dérivable en ce point. L'idée que la continuité d'une fonction sur un intervalle oblige à être assez régulière est naturelle, et l'on pouvait donc croire que si une fonction est continue sur un intervalle, à l'exception de quelques points

(comme pour la fonction $|x|$), la fonction devrait y être dérivable.

Le 18 juillet 1872, le mathématicien allemand Karl Weierstrass présenta à l'Académie des sciences de Berlin un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et qui n'est pourtant dérivable en aucun point. La fonction proposée résultait de manipulations habituelles sur les fonctions continues dérivables partout: il s'agit d'une somme infinie de telles fonctions. La formule de Weierstrass est:

$$f_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

Si l'on prend pour coefficients un nombre réel a tel que $0 < a < 1$ et un entier b tel que $ab > 1 + 3\pi/2$, on montre que $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable nulle part. Si l'on ne fait la somme que jusqu'à un entier k , on obtient une fonction continue et dérivable qui oscille de plus en plus vite quand k augmente; cette oscillation, qui correspond à une vibration accélérée de la tangente au graphe, rend impossible l'existence de la tangente quand k tend vers l'infini.

Weierstrass ne fut pas le premier à trouver une telle fonction. Au moins deux mathématiciens l'avaient précédé. Le premier est le mathématicien tchèque Bernard Bolzano, qui trouva une telle fonction vers 1830 mais dont les textes sur le sujet ne furent redécouverts que bien plus tard et publiés en 1922. Indépendamment, vers 1860, le mathématicien suisse Charles Cellérier trouva lui aussi une telle fonction, publiée après sa mort en 1890 (pour des détails, voir la belle et très complète thèse de Johan Thim, disponible sur internet).

L'encadré 4 donne le dessin et l'idée d'une autre fonction ayant les propriétés voulues, mais plus facile à visualiser. Son graphe est nommé «courbe du blanc-manger» (car elle ressemble au dessert de même nom) ou «courbe de Takagi», d'après le mathématicien japonais Teiji Takagi qui l'a décrite en 1901.

La courbe de Weierstrass a été l'une des toutes premières courbes fractales étudiées. Pourtant, le calcul de la dimension de Hausdorff du graphe de la fonction de Weierstrass (qui mesure en quelque sorte son agitation) est resté très longtemps un problème ouvert. Conjecturé depuis plus de trente ans par Benoît Mandelbrot, le théorème qui indique que cette dimension est égale à $2 + \ln(a)/\ln(b)$ n'a été prouvé qu'en 2017 par le mathématicien allemand Gerhard Keller, et indépendamment par le mathématicien chinois Weixiao Shen.

Insistons sur le fait que ces courbes étranges font aujourd'hui encore l'objet de nombreuses recherches. On en découvre de nouvelles de la même catégorie et on les rencontre en physique, ce qui prouve que ces «monstres mathématiques» sont à la fois d'une grande banalité et très utiles... ■

BIBLIOGRAPHIE

R. Ferreol, **L'escalier du diable**, <https://bit.ly/2QJLCNg>, consulté en juin 2020.

W. Shen, **Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions**, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 289, pp. 223-266, 2018.

S. Nechaev et K. Polovnikov, **Rare-event statistics and modular invariance**, *Physics-Uspekhi*, vol. 61(1), pp. 99-104, 2018.

S. Nechaev, **Non euclidean geometry in nature**, dans *Order, Disorder and Criticality, Advanced Problems of Phase Transition Theory*, vol. 5 (ed. Yuri Holovatch), 2018 (<https://arxiv.org/pdf/1705.08013.pdf>).

K. Beanland et al., **Modifications of Thomae's function and differentiability**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 116(6), pp. 531-535, 2009.

J. Thim, **Continuous, Nowhere Differentiable Functions**, Master Thesis, Lulea University, 2003 (<https://bit.ly/2YWLYEw>).