

# R

## ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul  
P.86 Art & science  
P.88 Idées de physique  
P.92 Chroniques de l'évolution  
P.96 Science & gastronomie  
P.98 À picorer

# CHANGER DE NUMÉRATION AVEC LE SYSTÈME « ESPERLUETTE »

Comment convertir facilement l'écriture décimale d'un entier en son écriture dans une autre base de numération? Certaines procédures permettent de le faire... sans avoir à calculer!

## L'AUTEUR



**JEAN-PAUL DELAHAYE**  
professeur émérite  
à l'université de Lille  
et chercheur au  
laboratoire Cristal  
(Centre de recherche  
en informatique, signal  
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

**L**e système décimal de numération de position est une merveille de simplicité et de puissance qui, pourtant, n'a été disponible dans sa forme actuelle qu'à partir du VI<sup>e</sup> siècle en Inde et n'est arrivé en Europe qu'à la fin du X<sup>e</sup> siècle. Il a donné naissance aux systèmes positionnels en base  $b$  ( $b$  entier positif), dont le système binaire qui est central en informatique.

Nous allons voir comment on peut, sans savoir calculer et en menant uniquement des manipulations locales sur une chaîne de caractères, écrire un nombre quelconque en base 2 ou même en base  $b > 2$ . Ces méthodes douces de conversion se fondent sur l'existence de systèmes de numération mixtes associant par exemple la notation unaire (ou « notation bâton », chaque unité étant représentée par un bâton) et la notation binaire, ou associant unaire et décimal. Elles conduisent aussi aux systèmes à plusieurs étages tels que le système informatique du « décimal codé binaire ». Nous procéderons progressivement en commençant par le système « esperluette » de règles pour la base 2, dont les clés de fonctionnement conduiront aux systèmes mixtes, puis aux systèmes à plusieurs étages.

De nombreuses informations présentées ici m'ont été communiquées par Roland Yéléhada, un lecteur de la rubrique qui m'a fait parvenir une longue lettre datée du 12 septembre 2020. À ma connaissance, les systèmes décrits ici sont originaux.

Les systèmes de règles de type esperluette ne nécessitent aucune compréhension de ce

qu'on fait. Ils sont plus intéressants pour concevoir des programmes informatiques que pour opérer à la main, car ils manipulent de longues séquences de caractères. Il est amusant de découvrir que, même en 2021, on peut encore progresser dans la mise au point de méthodes destinées à représenter et manipuler les nombres entiers.

Rappelons que le nombre qui s'écrit  $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$  en base positionnelle  $b$  représente l'entier :  $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$ . En base 2, la suite 1101 représente donc l'entier :

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13.$$

Le plus souvent, on impose aux entiers  $a_i$  d'être compris entre 0 et  $b-1$ , mais il est parfois utile de s'affranchir de cette limitation, et c'est d'ailleurs une technique utilisée en informatique pour manipuler de grands nombres.

Lorsque nous manipulerons plusieurs bases de numération en même temps, nous indiquerons en indice la base utilisée; par exemple,  $13_{10} = 1101_2$ . Venons-en à notre premier système de règles.

## LE SYSTÈME ESPERLUETTE POUR LA BASE 2

Le symbole typographique & porte le nom d'« esperluette » ou « et commercial » et aurait été introduit par Tiron, le secrétaire de Cicéron. Ce sera le nom général des systèmes de règles que nous allons décrire. Le premier et le plus simple concerne la base 2. Il permet la conversion des entiers en binaire sans même avoir à connaître la notion de puissance. Il fonctionne avec trois

## LE SYSTÈME DÉCIMAL DE POSITION

**L**e système de numération décimal positionnel a été conçu progressivement en Inde. Passant par les pays arabes grâce au mathématicien Al-Khwarizmi (vers 780-850) dont le nom nous a donné le mot « algorithme », il n'est arrivé en Europe qu'à la fin du  $x^e$  siècle. C'est à Gerbert d'Aurillac, devenu le pape Sylvestre II en 999, qu'on doit cette introduction. Il écrivit des traités sur les opérations arithmétiques et il inventa un abaque fondé sur le système décimal positionnel, c'est-à-dire un système de calcul avec des jetons où, selon leur position, ils représentent plusieurs unités, dizaines, centaines, etc. Grâce à son ouvrage *Liber abaci* de 1202, Léonard de Pise, alias Fibonacci, contribua cette fois d'une façon définitive à la diffusion du système, qui fut progressivement adopté partout en Europe.

Gerbert d'Aurillac, le pape de l'an mil (ici à la droite de l'empereur Otton III), était astronome et mathématicien.



## 2

### L'ORIGINE DU SYSTÈME BINAIRE

**O**n a trouvé en Chine, dès le  $ix^e$  siècle avant notre ère, des versions partielles du système binaire pas toujours destinées à compter, par exemple les 64 hexagrammes (I-Ching) qui sont la liste complète des figures composées de six traits horizontaux continus ou discontinus empilés. Un traité de Leibniz écrit en français en 1703 (*Explication de l'arithmétique binaire qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises du Fuxi*, <https://bit.ly/3kwQOjQ>) fournit la première explication claire du système binaire qu'il note comme nous avec des 0 et des 1. Le système binaire est essentiel en informatique, où il permet de représenter des nombres avec des mémoires à deux états (cartes perforées, positions d'un curseur, états électriques, etc.).

TABLE 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

| DES<br>NOMBRES. | bres entiers au-dessous du double du<br>plus haut degré. Car ici, c'est com-<br>me si on disoit, par exemple, que 111<br>ou 7 est la somme de quatre, de deux | 1000 4<br>100 2<br>10 1<br>1 1 | 1000 8<br>100 4<br>10 2<br>1 1 |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0 000 000 0     | 1 Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre                                                                                                              | 111 7                          | 1000 8                         |
| 0 000 001 1     | 2 & un. Cette propriété sert aux Effayeurs pour                                                                                                               |                                | 100 4                          |
| 0 000 010 10    | 3 pefier toutes sortes de masses avec peu de poids,                                                                                                           |                                | 10 2                           |
| 0 000 011 11    | 4 & pourroit fervir dans les monnoyes pour don-                                                                                                               |                                | 1 1                            |
| 0 000 100 100   | 5 ner plusieurs valeurs avec peu de pièces.                                                                                                                   |                                | 1101 13                        |
| 0 000 101 101   | 6 Cette expreffion des Nombres étant établie, sert à faire                                                                                                    |                                |                                |
| 0 000 110 110   | 7 très-facilement toutes sortes d'opérations.                                                                                                                 |                                |                                |
| 0 000 111 111   |                                                                                                                                                               |                                |                                |
| 0 001 000 8     | 8 Pour l'Addition                                                                                                                                             | 110 6                          | 101 5                          |
| 0 001 001 9     | 9                                                                                                                                                             | 111 7                          | 1011 11                        |
| 0 001 010 10    | 10 par exemple.                                                                                                                                               | 1101 13                        | 10001 17                       |
| 0 001 011 11    |                                                                                                                                                               | 11011 15                       | 11111 31                       |
| 0 001 100 12    | 12 Pour la Soustraction.                                                                                                                                      | 1101 13                        | 10000 16                       |
| 0 001 101 13    | 13                                                                                                                                                            | 111 7                          | 1011 11                        |
| 0 001 110 14    | 14                                                                                                                                                            | 110 6                          | 101 5                          |
| 0 001 111 15    | 15                                                                                                                                                            | 11 3                           | 101 5                          |
| 0 010 000 16    | 16 Pour la Multi-                                                                                                                                             | 11 3                           | 101 5                          |
| 0 010 001 17    | 17 plication.                                                                                                                                                 | 11 3                           | 101 5                          |
| 0 010 010 18    | 18                                                                                                                                                            | 11 3                           | 101 5                          |
| 0 010 011 19    | 19                                                                                                                                                            | 11 3                           | 101 5                          |
| 0 010 100 20    | 20                                                                                                                                                            | 1001 9                         | 1111 15                        |
| 0 010 101 21    | 21                                                                                                                                                            | 1001 9                         | 11001 25                       |
| 0 010 110 22    | 22 Pour la Division.                                                                                                                                          | 11 3                           | 101 5                          |
| 0 010 111 23    | 23                                                                                                                                                            | 11 3                           | 101 5                          |
| 0 011 000 24    | 24 Et toutes ces opérations font si aifées, qu'on n'a jamais                                                                                                  |                                |                                |
| 0 011 001 25    | 25 befoin de rien effayer ni deviner, comme il faut faire                                                                                                     |                                |                                |
| 0 011 010 26    | 26 dans la division ordinaire. On n'a point befoin non plus                                                                                                   |                                |                                |
| 0 011 011 27    | 27 de rien apprendre par cœur ici, comme il faut faire dans                                                                                                   |                                |                                |
| 0 011 100 28    | 28 le calcul ordinaire, où il faut fçavoir, par exemple, que                                                                                                  |                                |                                |
| 0 011 101 29    | 29 6 & 7 pris ensemble font 13; & que 5 multiplié par 3                                                                                                       |                                |                                |
| 0 011 110 30    | 30 donne 15, fùivant la Table d'une fois un est un; qu'on ap-                                                                                                 |                                |                                |
| 0 011 111 31    | 31 pelle Pythagorique. Mais ici tout cela se trouve & le                                                                                                      |                                |                                |
| 0 100 000 32    | 32 prouve de source, comme l'on voit dans les exemples pré-                                                                                                   |                                |                                |
| 0 100 001 33    | 33 cédens fous les lignes & c.                                                                                                                                |                                |                                |

Une page du mémoire de Leibniz de 1703.