

LE SYSTÈME DÉCIMAL DE POSITION

1

Le système de numération décimal positionnel a été conçu progressivement en Inde. Passant par les pays arabes grâce au mathématicien Al-Khwarizmi (vers 780-850) dont le nom nous a donné le mot « algorithme », il n'est arrivé en Europe qu'à la fin du x^e siècle. C'est à Gerbert d'Aurillac, devenu le pape Sylvestre II en 999, qu'on doit cette introduction. Il écrivit des traités sur les opérations arithmétiques et il inventa un abaque fondé sur le système décimal positionnel, c'est-à-dire un système de calcul avec des jetons où, selon leur position, ils représentent plusieurs unités, dizaines, centaines, etc. Grâce à son ouvrage *Liber abaci* de 1202, Léonard de Pise, alias Fibonacci, contribua cette fois d'une façon définitive à la diffusion du système, qui fut progressivement adopté partout en Europe.

Gerbert d'Aurillac, le pape de l'an mil (ici à la droite de l'empereur Otton III), était astronome et mathématicien.



2

L'ORIGINE DU SYSTÈME BINAIRE

On a trouvé en Chine, dès le ix^e siècle avant notre ère, des versions partielles du système binaire pas toujours destinées à compter, par exemple les 64 hexagrammes (I-Ching) qui sont la liste complète des figures composées de six traits horizontaux continus ou discontinus empilés. Un traité de Leibniz écrit en français en 1703 (*Explication de l'arithmétique binaire qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises du Fuxi*, <https://bit.ly/3kwQOjQ>) fournit la première explication claire du système binaire qu'il note comme nous avec des 0 et des 1. Le système binaire est essentiel en informatique, où il permet de représenter des nombres avec des mémoires à deux états (cartes perforées, positions d'un curseur, états électriques, etc.).

TABLE 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

DES NOMBRES.	bres entiers au-dessous du double du plus haut degré. Car ici, c'est com- me si on disoit, par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux	100 4 10 2 1 1 111 7 & d'un
0 0 0 0 0 0 0 0	1 Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre	1000 8
0 0 0 0 0 0 0 1	2 & un. Cette propriété sert aux Effayeurs pour	100 4
0 0 0 0 0 0 1 0	3 pefier toutes sortes de masses avec peu de poids,	1 1
0 0 0 0 0 0 1 1	4 & pourroit fervir dans les monnoyes pour don-	1101 13
0 0 0 0 0 1 0 0	5 ner plusieurs valeurs avec peu de pièces.	
0 0 0 0 0 1 0 1	6 Cette expreffion des Nombres étant établie, sert à faire	
0 0 0 0 0 1 1 0	7 très-facilement toutes sortes d'opérations.	
0 0 0 0 0 1 1 1	8	110 6 101 5 1110 14
0 0 0 0 1 0 0 0	9 Pour l'Addition	111 7 1011 11 10001 17
0 0 0 0 1 0 0 1	10 par exemple.	1101 13 10000 16 11111 31
0 0 0 0 1 0 1 0		
0 0 0 0 1 0 1 1	12 Pour la Soustraction.	1101 13 10000 16 11111 31
0 0 0 0 1 1 0 0	13	111 7 1011 11 10001 17
0 0 0 0 1 1 0 1	14	110 6 101 5 1110 14
0 0 0 0 1 1 1 0	15	
0 0 0 0 1 1 1 1	16	11 3 101 5 101 5
0 0 0 1 0 0 0 0	17 Pour la Multi-	11 3 101 5 101 5
0 0 0 1 0 0 0 1	18 plication.	11 3 101 5 101 5
0 0 0 1 0 0 1 0	19	11 3 101 5 101 5
0 0 0 1 0 0 1 1	20	1001 9 1111 15 11001 25
0 0 0 1 0 1 0 0	21	
0 0 0 1 0 1 0 1	22 Pour la Division.	15 3 111 5
0 0 0 1 0 1 1 0	23	
0 0 0 1 0 1 1 1	24 Et toutes ces opérations font si aisées, qu'on n'a jamais	
0 0 1 0 0 0 0 0	25 befoin de rien effayer ni deviner, comme il faut faire	
0 0 1 0 0 0 0 1	26 dans la division ordinaire. On n'a point befoin non plus	
0 0 1 0 0 0 1 0	27 de rien apprendre par cœur ici, comme il faut faire dans	
0 0 1 0 0 0 1 1	28 le calcul ordinaire, où il faut sçavoir, par exemple, que	
0 0 1 0 0 1 0 0	29 6 & 7 pris ensemble font 13; & que 5 multiplié par 3	
0 0 1 0 0 1 0 1	30 donne 15, suivant la Table d'une fois un est un; qu'on ap-	
0 0 1 0 0 1 1 0	31 pelle Pythagorique. Mais ici tout cela se trouve & le	
0 0 1 0 0 1 1 1	32 prouve de source, comme l'on voit dans les exemples pré-	
0 0 1 0 1 0 0 0	&c.	

Une page du mémoire de Leibniz de 1703.

> règles élémentaires, qui s'écrivent avec 24 symboles ou caractères en tout.

Dans la présentation des règles, x et y désignent des suites (éventuellement vides) quelconques de symboles pris parmi 0, 1 et &.

TROIS RÈGLES POUR PASSER AU BINAIRE

Règle $r1$: $\&x \rightarrow 0\&x$

Règle $r2$: $x0\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $r3$: $x0\&y \rightarrow x1y$

La règle $r1$ signifie que si une suite de symboles pris parmi 0, 1 et & commence par &, on peut introduire un 0 devant la suite. La règle $r2$ signifie que si, dans une suite de symboles pris parmi 0, 1 et &, on trouve quelque part la séquence 0&, alors on peut remplacer celle-ci par &0. De même, la règle $r3$ permet de remplacer 0& par 1.

Opérons, grâce à ces trois règles, la conversion de l'entier 5 écrit en unaire, &&&&&, pour obtenir son expression binaire, à savoir 101:

$\&\&\&\&\& \xrightarrow{r1} 0\&\&\&\&\& \xrightarrow{r2} \&0\&\&\&\& \xrightarrow{r2} \&\&0\& \xrightarrow{r1} 0\&\&0\& \xrightarrow{r2} \&00\& \xrightarrow{r1} 0\&00\& \xrightarrow{r3} 100\& \xrightarrow{r3} 101.$

On a indiqué à chaque fois la règle utilisée et on a souligné l'endroit de la suite de symboles sur lequel la règle agit. Autre conversion, cette fois de « onze fois & » vers 1011:

$\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r1} 0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r2} \&0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r2} \&\&0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r2} \&\&\&0\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r2} \&\&\&\&0\&\&\&\&\&\&\&$

$\xrightarrow{r2} \&\&\&\&\&\&0\& \xrightarrow{r1} 0\&\&\&\&\&\&0\& \xrightarrow{r2} \&0\&\&\&\&0\& \xrightarrow{r2} \&\&0\&\&0\& \xrightarrow{r1} 0\&\&0\&0\& \xrightarrow{r1} \&00\&0\& \xrightarrow{r1} 100\&0\& \xrightarrow{r3} 1010\& \xrightarrow{r3} 1011.$

La conversion se fait de la notation unaire de n , c'est-à-dire n fois le symbole &, vers la notation binaire de n , et cela sans manipuler de puissances de 2 et sans rien avoir à connaître d'autre que les trois règles.

Si l'on utilise $r3$ trop tôt, on pourrait se retrouver bloqué, comme dans cet exemple: $\&\&\&\&\& \xrightarrow{r1} 0\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r3} 1\&\&\&\&\&.$ Pour que la conversion fonctionne, il faut donc s'imposer de n'utiliser $r3$ que lorsque les règles $r1$ et $r2$ ne sont plus utilisables. En revanche, $r1$ et $r2$ sont utilisables librement, dans l'ordre que l'on veut.

Les manipulations pour convertir un nombre assez petit se font à la main sur une feuille de papier. Mais bien évidemment, pour les grands nombres, le procédé ne peut concerner qu'une machine programmée pour appliquer les règles. Notons qu'une machine sans processeur arithmétique conviendrait: elle doit seulement savoir reconnaître certaines séquences et opérer des ajouts ou des substitutions. Avec les règles $r1$, $r2$ et $r3$, aucune compétence en calcul n'est requise pour convertir un nombre en base 2!

D'où vient le miracle? Bien sûr, on peut tester le système et découvrir qu'il fonctionne toujours bien. Mais soyons sérieux et prouvons que la méthode est infaillible.

L'idée de la démonstration est de donner un sens numérique à toute suite finie de symboles

3

LA NUMÉRATION MAYA

La numération maya a été utilisée entre le III^e et le XIII^e siècle avec plusieurs variantes. Nous en présentons une version simplifiée pour illustrer l'idée des systèmes de numération à deux étages.

Il s'agit en première analyse d'une numération de position en base 20, numération dite « vicésimale » ou « vigésimale ». Nous utilisons 10 chiffres pour notre numération de position décimale, il en aurait donc fallu 20 pour le système maya. Les Mayas se sont contentés de trois symboles : un pour le zéro (une sorte de coquille), un autre désignant l'unité (un rond noir), et un troisième (une barre horizontale) qui représente 5 ronds noirs.

Cette notation des chiffres peut être vue comme une notation unaire, légèrement perfectionnée en regroupant les paquets de 5 ronds noirs. Sans ces regroupements, le système maya serait un pur système à deux étages en base 20 et unaire, comme le texte de l'article en définit avec des règles de manipulation ne demandant aucun calcul.

L'utilisation de la base 20 est naturelle, car c'est le nombre de doigts et d'orteils. Les systèmes en base 20 n'ont pas été utilisés seulement par les Mayas et, d'ailleurs, avec notre « quatre-vingts », nous en gardons encore une trace aujourd'hui en français (voir : https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_vicésimal).

				
0				
				5
1	2	3	4	
				
6	7	8	9	10
				
11	12	13	14	15
				
				
				 
16	17	18	19	20

Exemple :







représente :

$20 \times 20^3 + 3 \times 20^2 + 4 \times 20^1 + 5$
5
= 161 285