

> règles élémentaires, qui s'écrivent avec 24 symboles ou caractères en tout.

Dans la présentation des règles, x et y désignent des suites (éventuellement vides) quelconques de symboles pris parmi 0, 1 et &.

TROIS RÈGLES POUR PASSER AU BINAIRE

Règle r_1 : $0x \rightarrow 0&x$

Règle r_2 : $x0&y \rightarrow x&0y$

Règle r_3 : $x0&y \rightarrow x1y$

La règle r_1 signifie que si une suite de symboles pris parmi 0, 1 et & commence par 0, on peut introduire un 0 devant la suite. La règle r_2 signifie que si, dans une suite de symboles pris parmi 0, 1 et &, on trouve quelque part la séquence 0&, alors on peut remplacer celle-ci par &0. De même, la règle r_3 permet de remplacer 0& par 1.

Opérons, grâce à ces trois règles, la conversion de l'entier 5 écrit en unaire, &&&&&, pour obtenir son expression binaire, à savoir 101:

$\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_1} 0\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_2} \&0\&\&\&\& \xrightarrow{r_2} \&\&0\& \xrightarrow{r_1} 0\&\&0\& \xrightarrow{r_2} \&00\& \xrightarrow{r_1} 0\&00\& \xrightarrow{r_3} 100\& \xrightarrow{r_3} 101.$

On a indiqué à chaque fois la règle utilisée et on a souligné l'endroit de la suite de symboles sur lequel la règle agit. Autre conversion, cette fois de « onze fois & » vers 1011:

$\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_1} 0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_2} \&0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_2} \&\&0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_2} \&\&\&0\&\&\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_2} \&\&\&\&0\&\&\&\&\&\&\&$

$\xrightarrow{r_2} \&\&\&\&\&\&0\& \xrightarrow{r_1} 0\&\&\&\&\&\&0\& \xrightarrow{r_2} \&0\&\&\&\&0\& \xrightarrow{r_2} \&\&0\&0\& \xrightarrow{r_1} 0\&\&0\&0\& \xrightarrow{r_1} \&00\&0\& \xrightarrow{r_1} 0\&00\&0\& \xrightarrow{r_3} 100\&0\& \xrightarrow{r_3} 1010\& \xrightarrow{r_3} 1011.$

La conversion se fait de la notation unaire de n , c'est-à-dire n fois le symbole &, vers la notation binaire de n , et cela sans manipuler de puissances de 2 et sans rien avoir à connaître d'autre que les trois règles.

Si l'on utilise r_3 trop tôt, on pourrait se retrouver bloqué, comme dans cet exemple: $\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_1} 0\&\&\&\&\&\& \xrightarrow{r_3} 1\&\&\&\&\&.$ Pour que la conversion fonctionne, il faut donc s'imposer de n'utiliser r_3 que lorsque les règles r_1 et r_2 ne sont plus utilisables. En revanche, r_1 et r_2 sont utilisables librement, dans l'ordre que l'on veut.

Les manipulations pour convertir un nombre assez petit se font à la main sur une feuille de papier. Mais bien évidemment, pour les grands nombres, le procédé ne peut concerner qu'une machine programmée pour appliquer les règles. Notons qu'une machine sans processeur arithmétique conviendrait: elle doit seulement savoir reconnaître certaines séquences et opérer des ajouts ou des substitutions. Avec les règles r_1 , r_2 et r_3 , aucune compétence en calcul n'est requise pour convertir un nombre en base 2!

D'où vient le miracle? Bien sûr, on peut tester le système et découvrir qu'il fonctionne toujours bien. Mais soyons sérieux et prouvons que la méthode est infaillible.

L'idée de la démonstration est de donner un sens numérique à toute suite finie de symboles

LA NUMÉRATION MAYA

La numération maya a été utilisée entre le III^e et le XIII^e siècle avec plusieurs variantes. Nous en présentons une version simplifiée pour illustrer l'idée des systèmes de numération à deux étages.

Il s'agit en première analyse d'une numération de position en base 20, numération dite « vicésimale » ou « vigésimale ». Nous utilisons 10 chiffres pour notre numération de position décimale, il en aurait donc fallu 20 pour le système maya. Les Mayas se sont contentés de trois symboles : un pour le zéro (une sorte de coquille), un autre désignant l'unité (un rond noir), et un troisième (une barre horizontale) qui représente 5 ronds noirs.

Cette notation des chiffres peut être vue comme une notation unaire, légèrement perfectionnée en regroupant les paquets de 5 ronds noirs. Sans ces regroupements, le système maya serait un pur système à deux étages en base 20 et unaire, comme le texte de l'article en définit avec des règles de manipulation ne demandant aucun calcul.

L'utilisation de la base 20 est naturelle, car c'est le nombre de doigts et d'orteils. Les systèmes en base 20 n'ont pas été utilisés seulement par les Mayas et, d'ailleurs, avec notre « quatre-vingts », nous en gardons encore une trace aujourd'hui en français (voir : https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_vicésimal).

0				
•	••	•••	••••	—
1	2	3	4	5
•	••	•••	••••	—
6	7	8	9	10
•	••	•••	••••	—
11	12	13	14	15
•	••	•••	••••	—
16	17	18	19	20
•	••	•••	••••	•
Exemple :	•	••	•••	—
20 × 20 ³ + 3 × 20 ² + 4 × 20 ¹ + 5				= 161 285