> On pourrait compléter le système de règles pour que la conversion soit plus rapide et par exemple ajouter la règle $x0\&\&\&\&y \rightarrow x\&\&0y$, qui correspond à deux applications de $r2$.

D'autres règles sont à imaginer, mais pour être certain que le système ne produit pas d'absurdité (par exemple une conversion erronée), il faut s'assurer, pour chaque règle ajoutée, que son application laisse stable l'entier représenté par la somme des composantes A et B.

Toute suite finie composée des trois symboles 0, 1 et & représente ainsi un nombre unique et les règles indiquent comment manipuler de telles séquences sans changer le nombre représenté. On a donc un système de numération mixte associant unaire et binaire.

ESPERLUETTE POUR LA BASE 3

Le système esperluette s'adapte à la base 3, avec les règles suivantes.

Règle $s1$: $\&x \rightarrow 0\&x$

Règle $s2$: $x0\&\&\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $s3$: $x0\&\&y \rightarrow x2y$

Règle $s4$: $x0\&y \rightarrow x1y$

On utilise la couleur rouge pour les chiffres car ils désignent des chiffres de la base 3 qu'on utilisera plus loin en même temps que des chiffres de la base 2.

L'entier 11 s'écrit $9+2 = 1\times3^2+0\times3^1+2\times3^0 = 102_3$. Voyons comment s'opère la conversion avec le système esperluette de règles pour la base 3 :

$\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \rightarrow_{s1} 0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&$
$\rightarrow_{s2} \&0\&\&\&\&\&\&\&\& \rightarrow_{s2} \&\&0\&\&\&\&\&$
$\rightarrow_{s2} \&\&\&0\&\& \rightarrow_{s1} 0\&\&\&0\&\& \rightarrow_{s2} \&00\&\&$
$\rightarrow_{s1} 0\&00\&\& \rightarrow_{s3} 0\&02 \rightarrow_{s4} 102$

Pour que la conversion fonctionne, il faut donner priorité aux règles $s1$ et $s2$ sur les autres, et donner priorité à la règle $s3$ sur la règle $s4$.

Le même type de raisonnement que pour la base 2 démontre que les règles $s1$, $s2$, $s3$ et $s4$ fonctionnent toujours de façon infaillible pour convertir de la notation unaire à la notation ternaire.

UN PREMIER SYSTÈME À DEUX ÉTAGES

L'utilisation des règles $s1$ et $s2$ est intéressante et va nous donner un premier exemple de système de numération à deux étages. Dans une première phase des transformations utilisant les règles esperluette pour la base 3, les & sont poussés le plus à droite possible. Pour notre exemple, &&&&&&&&&&&, on aboutit à 0&00&&. La séquence obtenue quand $s2$ n'est plus utilisable se lit de la façon suivante :

- les 0 délimitent des boîtes dans lesquelles il y a plus ou moins de &, mais toujours moins de trois, car sinon on pourrait utiliser la règle $s2$. En délimitant les boîtes plus clairement dans notre exemple, cela donne :

0 [&] 0 [ ] 0 [&&], c'est-à-dire une boîte avec un &, une boîte avec zéro & et une boîte avec deux &.

Dans chacune des boîtes, il y a, en écriture unaire, le chiffre qui correspond à l'écriture en base 3 du nombre décimal 11 : 1, 0, 2.

Ce qu'on obtient est donc une écriture de 11 dans un système à deux étages : l'un utilisant l'unaire, l'autre utilisant le ternaire. Plus loin, nous présenterons des systèmes de type esperluette aboutissant à un système de numération à deux étages, décimal et binaire.

CONVERSION DE LA BASE 2 À LA BASE 3

Les deux systèmes présentés peuvent se regrouper en un seul qui permet de convertir de la base 2 à la base 3 et inversement. Pour ce faire, on prend les règles de la base 2 et leurs inverses ($r1$, $r2$, $r3$, $r1'$, $r2'$, $r3'$), les règles de la base 3 et leurs inverses ($s1$, $s2$, $s3$, $s4$, $s1'$, $s2'$, $s3'$, $s4'$). Cela fait 14 règles. On passera de la base 2 à la base 3 en utilisant les règles de la base 2 à l'envers pour obtenir le nombre en unaire, puis les règles de la base 3 pour passer du unaire au ternaire. Bien sûr, on pourra aussi passer du ternaire au binaire avec les 14 règles.

5 ADDITION EN BASE MIXTE BINAIRE-UNAIRE

Voyons comment on peut, sans calcul compliqué et en restant toujours avec des nombres en notation mixte binaire-unaire, réaliser une addition. Prenons deux nombres écrits en base mixte binaire-unaire, 10&&&110&&&0 et 10&&1110.

On peut savoir qu'ils valent 98 et 78 en utilisant la méthode des composantes A et B *(voir le texte principal)*. Nous effectuons cette conversion juste pour contrôler, ces valeurs ne seront pas utilisées :
2 + 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 16 + 16 + 32 = 98
et 2 + 4 + 8 + 16 + 16 + 32 = 78 ;
98 + 78 = 176.

Pour faire l'addition tout en restant codé dans le système mixte binaire-unaire, on se débarrasse d'abord de tous les 1 en utilisant la règle *r3'* qui permet de remplacer 1 par 0&. Cela conduit à 0&0&&&0&0&0&&&0 et 0&0&&0&0&0&0.

Cette écriture est facile à lire : les 0 délimitent des boîtes dans lesquelles les nombres sont écrits en unaire avec des &. On aligne les zéros en commençant par ceux situés le plus à droite. Cela aligne aussi les boîtes :
0-&-0-&&&-0-&-0-&-0-&&&-0 ;
0-&-0- && - 0-&-0-&-0- & -0.
Il suffit alors d'additionner le contenu des boîtes, c'est-à-dire de concaténer les contenus des boîtes d'une même colonne. Pour une addition de *k* nombres, la méthode serait la même. Le résultat est ici :
0-&&-0-&&&&&-0-&&-0-&&-0-&&&&-0.
Avec la méthode des composantes, on contrôle qu'il s'agit bien de 176 (lecture des & de droite à gauche) :
2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 16 + 16 + 32 + 32 = 176.

Si on le souhaite, le résultat est alors rapidement simplifié (par utilisation de *r1*, *r2* et *r3*) et par exemple réécrit seulement avec des 0 et des 1, c'est-à-dire en binaire :
10110000 = 16 + 32 + 128 = 176.