

- On pourrait compléter le système de règles pour que la conversion soit plus rapide et par exemple ajouter la règle $x0\&\&\&y \rightarrow x\&\&0y$, qui correspond à deux applications de $r2$.

D'autres règles sont à imaginer, mais pour être certain que le système ne produit pas d'absurdité (par exemple une conversion erronée), il faut s'assurer, pour chaque règle ajoutée, que son application laisse stable l'entier représenté par la somme des composantes A et B.

Toute suite finie composée des trois symboles 0, 1 et & représente ainsi un nombre unique et les règles indiquent comment manipuler de telles séquences sans changer le nombre représenté. On a donc un système de numération mixte associant unaire et binaire.

ESPERLUETTE POUR LA BASE 3

Le système esperluette s'adapte à la base 3, avec les règles suivantes.

Règle s1: $\&x \rightarrow 0\&x$

Règle s2: $x0\&\&\&y \rightarrow x\&0y$

Règle s3: $x0\&\&y \rightarrow x2y$

Règle s4: $x0\&y \rightarrow x1y$

On utilise la couleur rouge pour les chiffres car ils désignent des chiffres de la base 3 qu'on

utilisera plus loin en même temps que des chiffres de la base 2.

L'entier 11 s'écrit $9+2 = 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = 102_3$. Voyons comment s'opère la conversion avec le système esperluette de règles pour la base 3:

$$\&\&\&\&\&\&\&\&\&\rightarrow_{\S 1} \textcolor{red}{0}\&\&\&\&\&\&\&\&\&$$
$$\rightarrow_{\mathfrak{S}} \&0\&\&\&\&\&\&\&\rightarrow_{\mathfrak{S}} \&\&0\&\&\&\&\&$$
$$\rightarrow_{s_2} \&\&\&0\&\& \rightarrow_{s_1} 0\&\&\&0\&\& \rightarrow_{s_2} \&00\&\&$$
$$\rightarrow_{s1} 0\&00\&\& \rightarrow_{s3} 0\&02 \rightarrow_{s4} 102$$

Pour que la conversion fonctionne, il faut donner priorité aux règles s1 et s2 sur les autres, et donner priorité à la règle s3 sur la règle s4.

Le même type de raisonnement que pour la base 2 démontre que les règles s_1, s_2, s_3 et s_4 fonctionnent toujours de façon infaillible pour convertir de la notation unaire à la notation ternaire.

UN PREMIER SYSTÈME À DEUX ÉTAGES

L'utilisation des règles s_1 et s_2 est intéressante et va nous donner un premier exemple de système de numération à deux étages. Dans une première phase des transformations utilisant les règles esperluette pour la base 3, les $\&$ sont poussés le plus à droite possible. Pour notre exemple, $\&\&\&\&\&\&\&\&\&$, on aboutit à $0\&00\&$. La séquence obtenue quand s_2 n'est plus utilisable se lit de la façon suivante :

- les 0 délimitent des boîtes dans lesquelles il y a plus ou moins de &, mais toujours moins de trois, car sinon on pourrait utiliser la règle s2. En délimitant les boîtes plus clairement dans notre exemple, cela donne:

0 [&] 0 [] 0 [&&], c'est-à-dire une boîte avec un &, une boîte avec zéro & et une boîte avec deux &.

Dans chacune des boîtes, il y a, en écriture unaire, le chiffre qui correspond à l'écriture en base 3 du nombre décimal 11: 1, 0, 2.

Ce qu'on obtient est donc une écriture de 11 dans un système à deux étages: l'un utilisant l'unaire, l'autre utilisant le ternaire. Plus loin, nous présenterons des systèmes de type esperluette aboutissant à un système de numération à deux étages, décimal et binaire.

CONVERSION DE LA BASE 2 À LA BASE 3

Les deux systèmes présentés peuvent se regrouper en un seul qui permet de convertir de la base 2 à la base 3 et inversement. Pour ce faire, on prend les règles de la base 2 et leurs inverses ($r_1, r_2, r_3, r_1', r_2', r_3'$), les règles de la base 3 et leurs inverses ($s_1, s_2, s_3, s_4, s_1', s_2', s_3', s_4'$). Cela fait 14 règles. On passera de la base 2 à la base 3 en utilisant les règles de la base 2 à l'envers pour obtenir le nombre en unaire, puis les règles de la base 3 pour passer du unaire au ternaire. Bien sûr, on pourra aussi passer du ternaire au binaire avec les 14 règles.

ADDITION EN BASE MIXTE BINAIRE-UNAIRE

Voyons comment on peut, sans calcul compliqué et en restant toujours avec des nombres en notation mixte binaire-unaire, réaliser une addition. Prenons deux nombres écrits en base mixte binaire-unaire, 108881108880 et 10881110 .

On peut savoir qu'ils valent 98 et 78 en utilisant la méthode des composantes A et B (voir le texte principal). Nous effectuons cette conversion juste pour contrôler, ces valeurs ne seront pas utilisées :

$$2 + 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 16 + 16 + 32 = 98$$

$$\text{et } 2 + 4 + 8 + 16 + 16 + 16 + 32 = 78 ;$$

$$98 + 78 = 176.$$

Pour faire l'addition tout en restant codé dans le système mixte binaire-unaire, on se débarrasse d'abord de tous les 1 en utilisant la règle r3' qui permet de remplacer 1 par 06. Cela conduit à 060666060606660 et 0606060606060.

Cette écriture est facile à lire : les 0 délimitent des boîtes dans lesquelles les nombres sont écrits en

unaire avec des 8. On aligne les zéros en commençant par ceux situés le plus à droite.

Cela aligne aussi les boîtes :

0-8-0-888-0-8-0-8-0-888-0 ;
0-8-0-88-0-8-0-8-0-8-0.

Il suffit alors d'additionner le contenu des boîtes, c'est-à-dire de concaténer les contenus des boîtes d'une même colonne. Pour une addition de k nombres, la méthode serait la même.

Le résultat est ici :

0-88-0-88888-0-88-0-88-
0-8888-0.

Avec la méthode des composantes, on contrôle qu'il s'agit bien de 176 (lecture des 8 de droite à gauche) :

$$\begin{aligned} &2 + 2 + 2 + 2 \\ &+ 4 + 4 \\ &+ 8 + 8 \\ &+ 16 + 16 + 16 + 16 + 16 \\ &+ 32 + 32 \\ &= 176. \end{aligned}$$

Si on le souhaite, le résultat est alors rapidement simplifié (par utilisation de r_1 , r_2 et r_3) et par exemple réécrit seulement avec des 0 et des 1, c'est-à-dire en binaire :

$$10110000 = 16 + 32 + 128 = 176.$$

Le système de numération associé à cette écriture utilisant les six symboles $\&$, 0, 1, 0, 1, 2 est un système de numération triple. Il est certes un peu compliqué, mais il est remarquable que l'on puisse circuler d'une notation à une autre assez simplement avec quelques règles élémentaires. Si on le souhaitait, en introduisant d'autres couleurs et les règles nécessaires, on aurait par exemple un système de numération quadruple décimal-ternaire-binaire-unaire, etc.

POUR TOUTES LES BASES!

La généralisation du système esperluette pour la base 5 est facile à imaginer. Elle est donnée ci-dessous en utilisant la couleur verte pour les chiffres. La généralisation à une base quelconque, b , devient alors évidente.

Règle $t1$: $\&x \rightarrow 0\&x$

Règle $t2$: $x0\&\&\&\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $t3$: $x0\&\&\&y \rightarrow x4y$

Règle $t4$: $x0\&\&y \rightarrow x3y$

Règle $t5$: $x0\&y \rightarrow x2y$

Règle $t6$: $x0y \rightarrow x1y$

Comme précédemment, si l'on utilise le plus possible les règles $t1$ et $t2$, on arrive à une représentation du nombre étudié dans un système à deux étages: unaire et quinaire.

Par exemple, l'entier $39_{10} = 25_{10} + 10_{10} + 4_{10} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 124_5$ s'écrira $0\&0\&\&0\&\&\&$, ce qui, en faisant apparaître les boîtes, donne:

0 [$\&$] 0 [$\&\&$] 0 [$\&\&\&$].

De tels systèmes, ou du moins des systèmes assez proches, ont déjà été utilisés. Le système des Mayas, à peu de chose près (en remplaçant le symbole qui représente le 5 par cinq points ronds), est un système à un étage en base 20 et un étage unaire (voir l'encadré 3).

En informatique et en électronique, on utilise un système de ce type, le «décimal codé binaire», ou DCB, qui est un système à deux étages: un étage décimal et un étage binaire.

Pour représenter 237_{10} en DCB, on écrit 10 11 111, c'est-à-dire les trois chiffres 2, 3 et 7 successivement écrits en binaire. Dans la notation DCB, pour éviter toute confusion, il faut soit avoir réservé des espaces mémoire distincts pour chacune des écritures 10, 11 et 111, soit utiliser un séparateur ($10 \bullet 11 \bullet 111$).

On a vu que les systèmes esperluette peuvent convertir en notation à deux étages ternaire-unaire ou quinaire-unaire, mais l'étage le plus bas est unaire, ce qui est un peu encombrant. Existe-t-il un système de règles de type esperluette qui permettraient de convertir un nombre n donné en unaire en notation à deux étages décimal-binaire (comme le décimal codé binaire)?

La réponse est oui. C'est possible en introduisant des règles qui vont convertir le contenu des boîtes en unaire évoquées plus haut pour les écrire en binaire. Attention, ce système n'est pas exactement le même que celui qu'on

utiliserait pour créer un système mixte décimal-binaire et permettre les conversions entre le décimal et le binaire.

ESPERLUETTE POUR LE DÉCIMAL CODÉ BINAIRE

Voici les règles du système esperluette pour le DCB.

Règle $u1$: $\&x \rightarrow 0\&x$

Règle $u2$: $x0\&\&\&\&\&\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $u3$: $x0\&y \rightarrow x00\&y$

Règle $u4$: $x0\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $u5$: $x0\&y \rightarrow x1y$

Règle $u6$: $x00y \rightarrow x000y$

L'utilisation des six règles se fera en donnant priorité aux règles $u1$ et $u2$ qui conduisent à l'écriture en décimal-unaire du nombre considéré. Ensuite, on utilisera les règles $u3$ et $u4$ qui mènent à une écriture à trois étages, décimal-binaire-unaire. Enfin, les règles $u5$ et $u6$ réduisent la séquence pour l'écrire en décimal-binaire.

Voici un exemple pour comprendre la série des transformations. Partons d'une séquence de 2307 fois le $\&$. Après avoir appliqué autant que possible les règles $u1$ et $u2$, on arrive à $0\&\&0\&\&\&00\&\&\&\&\&\&$, ce qui est une représentation de 2307 en notation à deux étages décimal-unaire avec le 0 comme séparateur. L'application des règles $u3$ et $u4$ produit $00\&000\&0\&000\&0\&0\&$, ce qui, en délimitant les boîtes, s'écrit:

0 [0 $\&$ 0] 0 [0 $\&$ 0 $\&$] 0 [] 0 [0 $\&$ 0 $\&$ 0 $\&$].

On voit, séparées par des 0 (noirs), une boîte 0 $\&$ 0, puis une autre 0 $\&$ 0 $\&$, puis une boîte vide et enfin une quatrième boîte 0 $\&$ 0 $\&$ 0 $\&$. Chacune de ces boîtes est elle-même une suite de boîtes contenant plus ou moins de $\&$ séparés par des 0 bleus, et on reconnaît dans la première boîte le nombre 2 en binaire-unaire. Le nombre 3 en binaire-unaire est dans la seconde. Le 0 correspond à la troisième boîte, et le nombre 7 en binaire-unaire à la dernière.

La règle $u5$ transforme alors les boîtes du second étage en binaire, ce qui aboutit à 01001100111. En introduisant des blancs et en délimitant les boîtes:

0 [10] 0 [11] 0 [] 0 [111], où l'on reconnaît déjà 2307.

La règle $u6$ sert à placer un 0 bleu dans les boîtes délimitées par des 0 noirs ne contenant rien. Le résultat obtenu, 010011000111, est maintenant facile à lire si l'on comprend bien que les 0 noirs sont des séparateurs, et que les chiffres en bleu représentent les entiers 2, 3, 0 et 7 écrits en binaire:

0 10 0 11 0 0 0 111.

Le système des règles a donc converti le nombre 2307 du unaire au décimal-binaire. Vous imaginez sans mal que l'on conçoit aussi des systèmes de numération à autant d'étages que l'on veut, par exemple décimal-quaternaire-ternaire-binaire. De quoi s'amuser encore un moment! ■

BIBLIOGRAPHIE

Wikipédia, **Système de numération indo-arabe**, consulté en septembre 2020.

Wikipédia, **Esperluette**, septembre 2020.

Wikipédia, **Binary-coded decimal**, septembre 2020.

Wikipédia, **Numération maya**, septembre 2020.