

Le système de numération associé à cette écriture utilisant les six symboles &, 0, 1, 0, 1, 2 est un système de numération triple. Il est certes un peu compliqué, mais il est remarquable que l'on puisse circuler d'une notation à une autre assez simplement avec quelques règles élémentaires. Si on le souhaitait, en introduisant d'autres couleurs et les règles nécessaires, on aurait par exemple un système de numération quadruple décimal-ternaire-binaire-unaire, etc.

POUR TOUTES LES BASES!

La généralisation du système esperluette pour la base 5 est facile à imaginer. Elle est donnée ci-dessous en utilisant la couleur verte pour les chiffres. La généralisation à une base quelconque, b , devient alors évidente.

Règle $t1$: $\&x \rightarrow 0\&x$

Règle $t2$: $x0\&\&\&\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $t3$: $x0\&\&\&y \rightarrow x4y$

Règle $t4$: $x0\&\&y \rightarrow x3y$

Règle $t5$: $x0\&y \rightarrow x2y$

Règle $t6$: $x0y \rightarrow x1y$

Comme précédemment, si l'on utilise le plus possible les règles $t1$ et $t2$, on arrive à une représentation du nombre étudié dans un système à deux étages: unaire et quinaire.

Par exemple, l'entier $39_{10} = 25_{10} + 10_{10} + 4_{10} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 124_5$ s'écrira $0\&0\&0\&0\&\&$, ce qui, en faisant apparaître les boîtes, donne:

0 [&] 0 [&&] 0 [&&&].

De tels systèmes, ou du moins des systèmes assez proches, ont déjà été utilisés. Le système des Mayas, à peu de chose près (en remplaçant le symbole qui représente le 5 par cinq points ronds), est un système à un étage en base 20 et un étage unaire (voir l'encadré 3).

En informatique et en électronique, on utilise un système de ce type, le «décimal codé binaire», ou DCB, qui est un système à deux étages: un étage décimal et un étage binaire.

Pour représenter 237_{10} en DCB, on écrit 10 11 111, c'est-à-dire les trois chiffres 2, 3 et 7 successivement écrits en binaire. Dans la notation DCB, pour éviter toute confusion, il faut soit avoir réservé des espaces mémoire distincts pour chacune des écritures 10, 11 et 111, soit utiliser un séparateur (10•11•111).

On a vu que les systèmes esperluette peuvent convertir en notation à deux étages ternaire-unaire ou quinaire-unaire, mais l'étage le plus bas est unaire, ce qui est un peu encombrant. Existe-t-il un système de règles de type esperluette qui permettraient de convertir un nombre n donné en unaire en notation à deux étages décimal-binaire (comme le décimal codé binaire)?

La réponse est oui. C'est possible en introduisant des règles qui vont convertir le contenu des boîtes en unaire évoquées plus haut pour les écrire en binaire. Attention, ce système n'est pas exactement le même que celui qu'on

utiliserait pour créer un système mixte décimal-binaire et permettre les conversions entre le décimal et le binaire.

ESPERLUETTE POUR LE DÉCIMAL CODÉ BINAIRE

Voici les règles du système esperluette pour le DCB.

Règle $u1$: $\&x \rightarrow 0\&x$

Règle $u2$: $x0\&\&\&\&\&\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $u3$: $x0\&y \rightarrow x00\&y$

Règle $u4$: $x0\&\&y \rightarrow x\&0y$

Règle $u5$: $x0\&y \rightarrow x1y$

Règle $u6$: $x00y \rightarrow x000y$

L'utilisation des six règles se fera en donnant priorité aux règles $u1$ et $u2$ qui conduisent à l'écriture en décimal-unaire du nombre considéré. Ensuite, on utilisera les règles $u3$ et $u4$ qui mènent à une écriture à trois étages, décimal-binaire-unaire. Enfin, les règles $u5$ et $u6$ réduisent la séquence pour l'écrire en décimal-binaire.

Voici un exemple pour comprendre la série des transformations. Partons d'une séquence de 2307 fois le &. Après avoir appliqué autant que possible les règles $u1$ et $u2$, on arrive à $0\&\&0\&\&\&00\&\&\&\&\&$, ce qui est une représentation de 2307 en notation à deux étages décimal-unaire avec le 0 comme séparateur. L'application des règles $u3$ et $u4$ produit $00\&000\&0\&000\&0\&0\&$, ce qui, en délimitant les boîtes, s'écrit:

0 [0&0] 0 [0&0&] 0 [] 0 [0&0&0&].

On voit, séparées par des 0 (noirs), une boîte 0&0, puis une autre 0&0&, puis une boîte vide et enfin une quatrième boîte 0&0&0&. Chacune de ces boîtes est elle-même une suite de boîtes contenant plus ou moins de & séparés par des 0 bleus, et on reconnaît dans la première boîte le nombre 2 en binaire-unaire. Le nombre 3 en binaire-unaire est dans la seconde. Le 0 correspond à la troisième boîte, et le nombre 7 en binaire-unaire à la dernière.

La règle $u5$ transforme alors les boîtes du second étage en binaire, ce qui aboutit à 01001100111. En introduisant des blancs et en délimitant les boîtes:

0 [10] 0 [11] 0 [] 0 [111], où l'on reconnaît déjà 2307.

La règle $u6$ sert à placer un 0 bleu dans les boîtes délimitées par des 0 noirs ne contenant rien. Le résultat obtenu, 010011000111, est maintenant facile à lire si l'on comprend bien que les 0 noirs sont des séparateurs, et que les chiffres en bleu représentent les entiers 2, 3, 0 et 7 écrits en binaire:

0 10 0 11 0 0 0 111.

Le système des règles a donc converti le nombre 2307 du unaire au décimal-binaire. Vous imaginez sans mal que l'on conçoit aussi des systèmes de numération à autant d'étages que l'on veut, par exemple décimal-quaternaire-ternaire-binaire. De quoi s'amuser encore un moment! ■

BIBLIOGRAPHIE

Wikipédia, **Système de numération indo-arabe**, consulté en septembre 2020.

Wikipédia, **Esperluette**, septembre 2020.

Wikipédia, **Binary-coded decimal**, septembre 2020.

Wikipédia, **Numération maya**, septembre 2020.