

profondeur, on risque de retrouver la situation antérieure, voire une situation pire.

Comparer les pays, c'est donc aussi comparer les systèmes de santé avant l'épidémie. Au départ, la comparaison était très en faveur de l'Allemagne: davantage de lits de réanimation, de personnel médical... Mais quand on regarde dans le détail, tout n'est pas aussi rose. Par exemple, l'Allemagne a aussi du mal à recruter du personnel soignant... Le rôle du privé y est peut-être aussi différent. De façon générale, la pandémie prouve que la «préparation» passe par la restauration d'un meilleur fonctionnement des hôpitaux, ainsi que par un rapport différent entre l'hôpital et la médecine de ville.

Comparer la façon dont les pays ont géré l'épidémie de Covid-19, c'est aussi comparer les systèmes de santé avant l'épidémie

Et par une réflexion sur la vieillesse...

En effet. En France, les autorités savaient que les Ehpad avaient évolué dramatiquement, pour deux raisons: la population vieillit et, de plus, comprend qu'il est préférable de rester chez soi grâce à quelques aménagements. Les Ehpad sont donc peuplés de gens de plus en plus dépendants. La survie moyenne y est de deux ans. Par conséquent, si l'on tient à conserver les aînés en vie, il faut repenser les Ehpad, les médicaliser davantage et plus intelligemment. Ils ne peuvent plus fonctionner avec un médecin qui passe de temps en temps et encore moins avec des téléconsultations, et avec un personnel qui manque de temps.

La gestion de la vieillesse est donc un élément important à prendre en compte en comparant les pays. Le Portugal, notamment, a plutôt bien géré la première vague. Peut-être parce que les personnes âgées sont prises en

charge par les familles et qu'il y a donc peu d'équivalents des Ehpad.

Mais les nouveaux variants du virus changent la donne et le Portugal souffre actuellement d'une troisième vague particulièrement forte. Quelque chose frappe dans cette pandémie: d'une part, l'urgence dans laquelle il faut prendre des décisions – comme pour le choléra à Hambourg, c'est une question de jours – et, d'autre part, l'incertitude scientifique. On a beau avoir des connaissances qui l'emportent de beaucoup sur celles de 1892, l'incertitude nous bride toujours. «Rien n'est jamais acquis à l'homme», disait Louis Aragon. Des vers particulièrement d'actualité aujourd'hui.

Que pensez-vous de la décision du gouvernement français fin janvier 2021: pas de reconfinement, alors que tout le monde pensait qu'il allait reconfiner?

C'est un scénario que le sociologue allemand Max Weber a bien illustré dans son livre *Le Savant et le Politique* (1919). Dans un premier temps, au moment du premier confinement, le gouvernement s'est complètement abrité derrière les scientifiques. Puis il s'en est peu à peu écarté. Les scientifiques sont aujourd'hui en faveur d'un reconfinement et le gouvernement ne suit pas, et pas seulement au regard d'intérêts économiques sordides. Il est devenu à juste titre plus soucieux des problèmes socioéconomiques que le confinement aggraverait encore.

Comment améliorer les mesures prises?

Le gouvernement a géré le début de la crise de façon totalement verticale, de même que sa communication s'est montrée très infantilisante. Emmanuel Macron a amendé ses propos au fur et à mesure, le «je» a fait place au «nous», mais la gestion reste encore très verticale.

En avril 2020, une lettre ouverte d'acteurs de la lutte contre le sida publiée sur le site Mediapart a rappelé la leçon du sida. On ne peut lutter contre une épidémie qu'en écoutant les gens, en examinant comment ils la vivent et peuvent la contrer à leur niveau. C'est enfin en train de venir timidement, avec l'apparition d'un comité de la vaccination et d'autres structures de concertation qui se mettent en place, mais c'est tardif!

On a raté un essai de démocratie sanitaire en conditions réelles. Évidemment, l'enjeu est complexe, et les difficultés de taille. Ni l'urgence ni les connaissances actuelles ne permettaient de manœuvrer facilement. Il n'empêche qu'on aurait pu saisir davantage cette occasion de tenter la gestion de l'épidémie de façon plus démocratique, ce que peut-être au fond jamais personne n'a encore fait. ■

Propos recueillis
par Marie-Neige Cordonnier

BIBLIOGRAPHIE

G. Lachenal et G. Thomas,
**L'histoire immobile
du coronavirus,**
dans C. Bonneuil (éd.),
Comment faire ?,
Seuil, 2020, pp. 62-70.

R. J. Evans,
Death in Hamburg,
Penguin Books, 2006.

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul

P.86 Art & science

P.88 Idées de physique

P.92 Chronique de l'évolution

P.96 Science & gastronomie

P.98 À picorer

ADDITION ET MULTIPLICATION, DES TABLES QUI INTRIGUENT

Combien de nombres différents y a-t-il dans une table d'addition ou de multiplication? Cette question est à l'origine d'une famille de passionnants problèmes arithmétiques.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

On croit tout savoir de l'addition et de la multiplication des entiers. Ce n'est pas le cas. L'étude des tables pour les deux opérations a donné naissance à une frénésie de recherches dont le point de départ est un article publié en 1983 dans la revue *Studies in Pure Mathematics* par le prolifique mathématicien hongrois Paul Erdős et son compatriote Endre Szemerédi. Nous verrons que la conjecture principale de leur article reste ouverte mais que, petit à petit, les chercheurs s'approchent de sa résolution.

Vous avez sans doute remarqué que dans une table d'addition, les cases contiennent des nombres plusieurs fois présents. Le 10 est par exemple le résultat de $1+9$, mais aussi de $2+8$, $3+7$, $4+6$, $5+5$, $6+4$, $7+3$, $8+2$ et $9+1$: 10 est présent dans neuf cases. Dans la table de multiplication, on trouve bien $2 \times 6 = 12 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 6 \times 2$, mais, au total, il y a moins de répétitions. Il y a 19 nombres différents dans la table d'addition, alors que dans la table de multiplication on en trouve 42 (voir l'encadré 1). Le phénomène se confirme si, au lieu de prendre les tables pour les nombres entre 1 et 10, on examine les tables pour les entiers entre 1 et 100 : la table d'addition contient 199 nombres différents, tandis que la table de multiplication en contient 2906.

Pour certaines séries de nombres autres que celles d'entiers consécutifs, la domination de la multiplication n'est plus vraie. Il faut aller voir de près. Nous allons nous

intéresser aux tables d'addition et de multiplication que l'on obtient quand on se donne n nombres $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, avec $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$, à la place de $\{1, 2, \dots, 10\}$ des tables apprises à l'école.

TABLES ASSOCIÉES À UNE SUITE D'ENTIERS

Avec $\{1, 2, 5, 7\}$ par exemple, on a les deux tables :

+	1	2	5	7
1	2	3	5	8
2	3	4	7	9
5	6	7	10	12
7	8	9	12	14

×	1	2	5	7
1	1	2	5	7
2	2	4	10	14
5	5	10	25	35
7	7	14	35	49

Avec $\{1, 2, 4, 8\}$ les tables sont :

+	1	2	4	8
1	2	3	5	9
2	3	4	6	10
4	5	6	8	12
8	9	10	12	16

×	1	2	4	8
1	1	2	4	8
2	2	4	8	16
4	4	8	16	32
8	8	16	32	64

Nous avons mis en rouge les nombres au-dessus de la diagonale, symétriques de ceux au-dessous de la diagonale à cause de la commutativité de l'addition et de la multiplication.

Les cases noires dans une telle table sont au nombre de $n(n+1)/2$, car il y en a une sur la première ligne, deux sur la seconde, ..., n sur la dernière, ce qui fait au total : $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$. Les cases noires contiennent parfois des nombres tous différents, comme dans les deux tables de $\{1, 2, 5, 7\}$ ainsi que pour la table d'addition de $\{1, 2, 4, 8\}$, mais pas pour la table de multiplication de $\{1, 2, 4, 8\}$.

QUELQUES RÉPÉTITIONS DANS LES TABLES

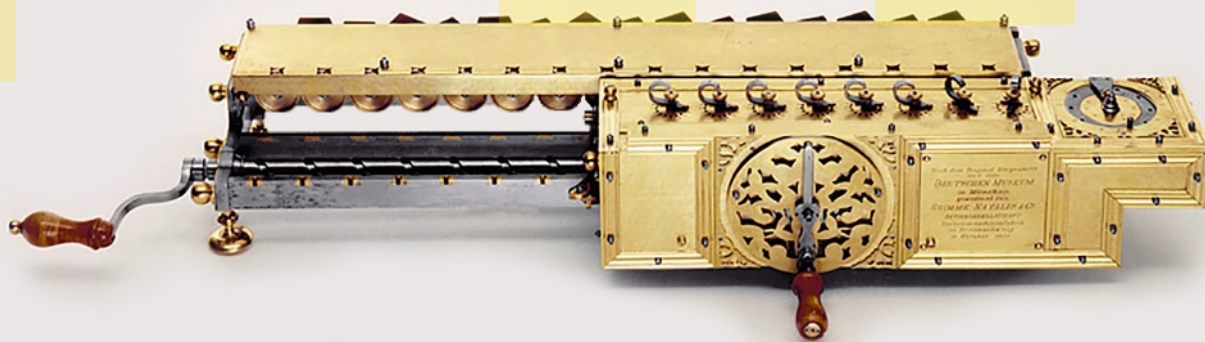
Les tables d'addition et de multiplication usuelles (ci-contre) contiennent respectivement 19 et 42 nombres différents. Savoir si cet écart important est un hasard ou s'il existe des résultats et des règles généralisant la remarque est le sujet du présent article. Ci-dessous, la machine à multiplier de Leibniz de 1694.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

19 cases différentes

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

42 cases différentes



Le nombre minimal de cases rouges différentes de la table d'addition est $2n-1$, car l'hypothèse $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ entraîne que :

$$a_1 + a_1 < a_2 + a_1 < \dots < a_{n-1} + a_1 < a_n + a_1 < a_n + a_2 < \dots < a_n + a_n$$

Ce nombre minimum est atteint pour les tables d'addition des entiers entre 1 et n . Le minimum pour la table de multiplication est aussi $2n-1$, car :

$$a_1 \times a_1 < a_2 \times a_1 < \dots < a_{n-1} \times a_1 < a_n \times a_1 < a_n \times a_2 < \dots < a_n \times a_n$$

Ce minimum est atteint pour la table de multiplication de $\{1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}\}$.

MAXIMUM DE CASES DIFFÉRENTES

Les questions qui agitent les mathématiciens suite à l'article de 1983 concernent justement ce nombre de cases différentes dans les parties rouges des tables. Avant de présenter la grande question posée, nous allons envisager une série de problèmes d'arithmétique plus simples qui nous conduiront à découvrir quelques suites numériques inattendues.

Question 1. Existe-t-il des suites infinies (a_i) telles que, pour tout entier n , la table d'addition de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ait $n(n+1)/2$ cases rouges différentes ? Nous dirons qu'une telle suite est optimale pour l'addition et que les tables d'addition associées sont optimales.

Question 2. Même question pour la table de multiplication. Les suites (b_i) donnant le plus possible de produits seront des «suites optimales pour la multiplication» et les tables

associées seront des «tables optimales pour la multiplication».

Question 3. Même question encore pour les deux tables en même temps. La question est donc : existe-t-il des suites infinies (c_i) telles que, pour tout entier n , les tables d'addition et de multiplication de $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ aient chacune le maximum possible de cases rouges différentes, c'est-à-dire $n(n+1)/2$ chacune ?

Question 4. Peut-on trouver des suites infinies (d_i) telles que, pour tout entier n , les tables d'addition et de multiplication de $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ aient chacune exactement $2n-1$ cases différentes, ou au plus kn cases différentes pour un nombre k à préciser ?

SUITES ET TABLES OPTIMALES POUR L'ADDITION

Pour la question 1, on cherche donc une suite infinie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, avec $0 < a_i < a_j$ quand $i < j$, telles que les tables d'addition associées aux n premiers éléments de la suite aient $n(n+1)/2$ cases différentes. Dit autrement, on veut que toutes les sommes $a_i + a_j$ avec $i \geq j$ soient différentes.

Procédons progressivement pour rechercher une telle suite. Avec $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$, ça marche, car la table d'addition comporte trois cases rouges correspondant à $1+1=2$, $1+2=3$, $2+2=4$, qui sont trois nombres différents. On essaie $a_3=3$. Cet a_3 ne convient pas car $2+2=1+3$. On essaie donc $a_3=4$. Cette fois, c'est bon, la table d'addition pour $\{1, 2, 4\}$ comporte six >