

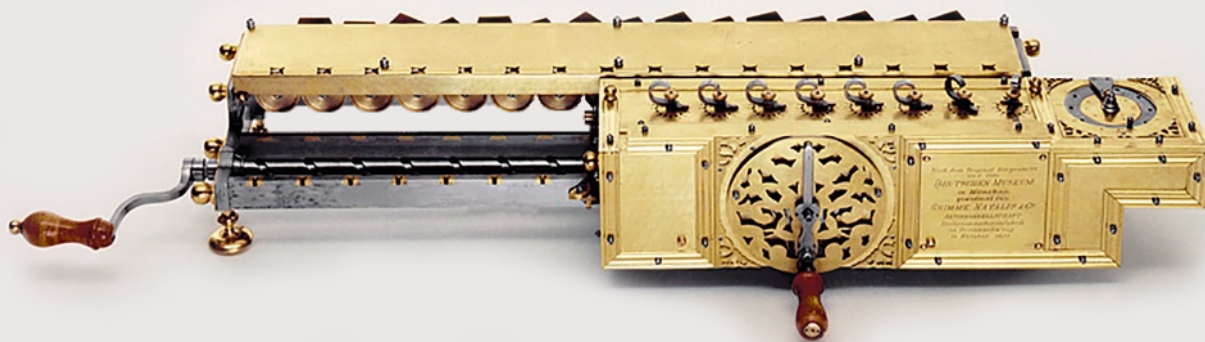
QUELQUES RÉPÉTITIONS DANS LES TABLES

1 Les tables d'addition et de multiplication usuelles (ci-contre) contiennent respectivement 19 et 42 nombres différents. Savoir si cet écart important est un hasard ou s'il existe des résultats et des règles généralisant la remarque est le sujet du présent article. Ci-dessous, la machine à multiplier de Leibniz de 1694.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	3	3	6	9	12	15	16	21	24	27	30
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
19 cases différentes											42 cases différentes										

19 cases différentes

42 cases différentes



Le nombre minimal de cases rouges différentes de la table d'addition est $2n-1$, car l'hypothèse $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ entraîne que :

$$a_1 + a_1 < a_2 + a_1 < \dots < a_{n-1} + a_1 < a_n + a_1 < a_n + a_2 < \dots < a_n + a_n$$

Ce nombre minimum est atteint pour les tables d'addition des entiers entre 1 et n . Le minimum pour la table de multiplication est aussi $2n-1$, car :

$$a_1 \times a_1 < a_2 \times a_1 < \dots < a_{n-1} \times a_1 < a_n \times a_1 < a_n \times a_2 < \dots < a_n \times a_n$$

Ce minimum est atteint pour la table de multiplication de $\{1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}\}$.

MAXIMUM DE CASES DIFFÉRENTES

Les questions qui agitent les mathématiciens suite à l'article de 1983 concernent justement ce nombre de cases différentes dans les parties rouges des tables. Avant de présenter la grande question posée, nous allons envisager une série de problèmes d'arithmétique plus simples qui nous conduiront à découvrir quelques suites numériques inattendues.

Question 1. Existe-t-il des suites infinies (a_i) telles que, pour tout entier n , la table d'addition de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ait $n(n+1)/2$ cases rouges différentes ? Nous dirons qu'une telle suite est optimale pour l'addition et que les tables d'addition associées sont optimales.

Question 2. Même question pour la table de multiplication. Les suites (b_i) donnant le plus possible de produits seront des « suites optimales pour la multiplication » et les tables

associées seront des « tables optimales pour la multiplication ».

Question 3. Même question encore pour les deux tables en même temps. La question est donc : existe-t-il des suites infinies (c_i) telles que, pour tout entier n , les tables d'addition et de multiplication de $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ aient chacune le maximum possible de cases rouges différentes, c'est-à-dire $n(n+1)/2$ chacune ?

Question 4. Peut-on trouver des suites infinies (d_i) telles que, pour tout entier n , les tables d'addition et de multiplication de $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ aient chacune exactement $2n-1$ cases différentes, ou au plus kn cases différentes pour un nombre k à préciser ?

SUITES ET TABLES OPTIMALES POUR L'ADDITION

Pour la question 1, on cherche donc une suite infinie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, avec $0 < a_i < a_j$ quand $i < j$, telles que les tables d'addition associées aux n premiers éléments de la suite aient $n(n+1)/2$ cases différentes. Dit autrement, on veut que toutes les sommes $a_i + a_j$ avec $i \geq j$ soient différentes.

Procédons progressivement pour rechercher une telle suite. Avec $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$, ça marche, car la table d'addition comporte trois cases rouges correspondant à $1+1 = 2$, $1+2 = 3$, $2+2 = 4$, qui sont trois nombres différents. On essaie $a_3 = 3$. Cet a_3 ne convient pas car $2+2 = 1+3$. On essaie donc $a_3 = 4$. Cette fois, c'est bon, la table d'addition pour $\{1, 2, 4\}$ comporte six >