

> cases rouges différentes correspondant à $1+1 = 2$, $1+2 = 3$, $2+2 = 4$, $1+4 = 5$, $2+4 = 6$ et $4+4 = 8$. Quand on applique cette méthode de recherche progressive du plus petit nombre qui convient, on parle d'algorithme glouton. Cette méthode systématique de construction va jouer un rôle important dans toute cette recherche (voir l'encadré 3).

Pour savoir ce que donne l'algorithme glouton pour le problème qui nous concerne, il vaut mieux écrire un petit programme et faire calculer l'ordinateur. En 30 étapes gloutonnes, il trouve la suite: 1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 204, 252, 290, 361, 401, 475, 565, 593, 662, 775, 822, 916, 970, 1016, 1159, 1312, ...

Réussir à trouver 30 nombres ne garantit pas *a priori* qu'on trouvera toujours un nouvel élément à ajouter jusqu'à l'infini. Est-ce que la méthode peut se bloquer? Non, cela ne se produira pas, car, en ajoutant un nombre N plus grand que toutes les sommes déjà dans la table pour $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, on est certain d'obtenir avec ce nouveau nombre une nouvelle ligne $\{N+a_1, N+a_2, \dots, N+a_n\}$ ne comportant que des cases différentes de celles de la table précédente (car dépassant tous les nombres de la table précédente) et composée de nombres différents. Il y

a donc au moins un nombre N qui peut compléter $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; il y en a donc un plus petit qui sera le a_{n+1} trouvé par l'algorithme glouton.

Malgré le début 1, 2, 4, 8, qui correspond aux puissances de 2, la suite trouvée est finalement assez étrange et semblait inconnue. Heureusement, nous disposons du merveilleux site de l'Encyclopédie en ligne des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org>). Si on l'interroge pour la suite calculée, on trouve que c'est la suite A005282 portant le nom de « suite de Mian-Chowla » car elle a été imaginée en 1944 par les chercheurs indiens Abdul Majid Mian et Sarvadaman Chowla.

Pour la suite (a_n) de Mian-Chowla, on sait que $n^2/2 + cn < a_n < n^3/6 + c'n^2$, où c et c' sont des constantes positives, et on conjecture que a_n vaut environ $n^3/(\log n)^2$ quand n devient grand. Les termes de la suite ont été calculés jusqu'à 25000 (<https://oeis.org/A005282/a005282.txt>). Aucune formule connue ne permet d'avoir directement le n -ième terme de la suite!

UN PARADOXE?

Il se produit quelque chose d'étrange pour la somme des inverses de la suite (a_n) de Mian-Chowla, à savoir $1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/13 + 1/21$

2

TABLES OPTIMALES POUR L'ADDITION

Lorsque l'on construit une suite de nombres entiers en partant de $a_1 = 1$ et en s'arrangeant pour ajouter pas à pas des nombres tels que la table d'addition et la table de multiplication de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ comportent chacune le plus grand nombre possible de résultats différents, c'est-à-dire $n(n+1)/2$, on obtient la suite : 1, 2, 5, 7, 15, 22, 31, 50, 68, 90, 101, 124, 163, 188, 215, 253, 322, 358, 455, 486, 527, 631, 702, 780, 838, 920, 1 030, 1 062, 1 197, 1 289, 1 420, 1 500, 1 689, 1 765, 1 886, 2 114, 2 353, 2 410, 2 570, 2 686, 2 857, 3 063, 3 207, 3 477, 3 616, 3 845, 3 951, 4 150, 4 480, 4 595. Le graphique représente les termes de la suite A337655. Les tables d'addition et de multiplication sont représentées pour $n = 8$.

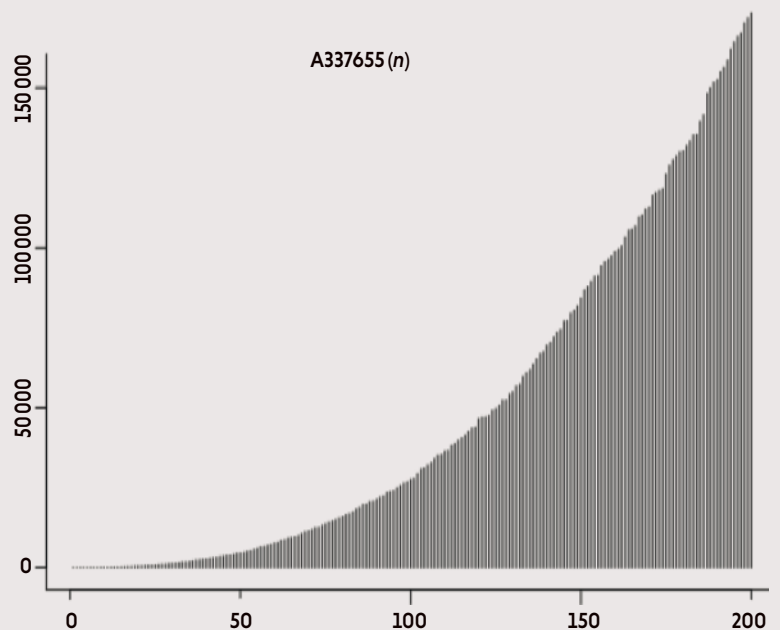


Table d'addition								
+	1	2	5	7	15	22	31	50
1	1	3	6	8	16	23	32	51
2	3	4	7	9	17	24	33	52
5	6	7	10	12	20	27	36	55
7	8	9	12	14	22	29	38	57
15	16	17	20	22	30	37	46	65
22	23	24	27	29	37	44	53	72
31	32	33	36	38	46	53	62	81
50	51	52	55	57	65	72	81	100

Table de multiplication								
×	1	2	5	7	15	22	31	50
1	1	2	5	7	15	22	31	50
2	2	4	10	14	30	44	62	100
5	5	10	25	35	75	110	155	250
7	7	14	35	49	105	154	217	350
15	15	30	75	105	225	330	465	750
22	22	44	110	154	330	484	682	1100
31	31	62	155	217	465	682	961	1550
50	50	100	250	350	750	1100	1550	2500