

> cases rouges différentes correspondant à $1+1 = 2$, $1+2 = 3$, $2+2 = 4$, $1+4 = 5$, $2+4 = 6$ et $4+4 = 8$. Quand on applique cette méthode de recherche progressive du plus petit nombre qui convient, on parle d'algorithme glouton. Cette méthode systématique de construction va jouer un rôle important dans toute cette recherche (voir l'encadré 3).

Pour savoir ce que donne l'algorithme glouton pour le problème qui nous concerne, il vaut mieux écrire un petit programme et faire calculer l'ordinateur. En 30 étapes gloutonnes, il trouve la suite: 1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 204, 252, 290, 361, 401, 475, 565, 593, 662, 775, 822, 916, 970, 1016, 1159, 1312, ...

Réussir à trouver 30 nombres ne garantit pas *a priori* qu'on trouvera toujours un nouvel élément à ajouter jusqu'à l'infini. Est-ce que la méthode peut se bloquer? Non, cela ne se produira pas, car, en ajoutant un nombre N plus grand que toutes les sommes déjà dans la table pour $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, on est certain d'obtenir avec ce nouveau nombre une nouvelle ligne $\{N+a_1, N+a_2, \dots, N+a_n\}$ ne comportant que des cases différentes de celles de la table précédente (car dépassant tous les nombres de la table précédente) et composée de nombres différents. Il y

a donc au moins un nombre N qui peut compléter $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; il y en a donc un plus petit qui sera le a_{n+1} trouvé par l'algorithme glouton.

Malgré le début 1, 2, 4, 8, qui correspond aux puissances de 2, la suite trouvée est finalement assez étrange et semblait inconnue. Heureusement, nous disposons du merveilleux site de l'Encyclopédie en ligne des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org>). Si on l'interroge pour la suite calculée, on trouve que c'est la suite A005282 portant le nom de « suite de Mian-Chowla » car elle a été imaginée en 1944 par les chercheurs indiens Abdul Majid Mian et Sarvadaman Chowla.

Pour la suite (a_n) de Mian-Chowla, on sait que $n^2/2 + cn < a_n < n^3/6 + c'n^2$, où c et c' sont des constantes positives, et on conjecture que a_n vaut environ $n^3/(\log n)^2$ quand n devient grand. Les termes de la suite ont été calculés jusqu'à 25000 (<https://oeis.org/A005282/a005282.txt>). Aucune formule connue ne permet d'avoir directement le n -ième terme de la suite!

UN PARADOXE?

Il se produit quelque chose d'étrange pour la somme des inverses de la suite (a_n) de Mian-Chowla, à savoir $1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/13 + 1/21$

2

TABLES OPTIMALES POUR L'ADDITION

Lorsque l'on construit une suite de nombres entiers en partant de $a_1 = 1$ et en s'arrangeant pour ajouter pas à pas des nombres tels que la table d'addition et la table de multiplication de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ comportent chacune le plus grand nombre possible de résultats différents, c'est-à-dire $n(n+1)/2$, on obtient la suite : 1, 2, 5, 7, 15, 22, 31, 50, 68, 90, 101, 124, 163, 188, 215, 253, 322, 358, 455, 486, 527, 631, 702, 780, 838, 920, 1 030, 1 062, 1 197, 1 289, 1 420, 1 500, 1 689, 1 765, 1 886, 2 114, 2 353, 2 410, 2 570, 2 686, 2 857, 3 063, 3 207, 3 477, 3 616, 3 845, 3 951, 4 150, 4 480, 4 595. Le graphique représente les termes de la suite A337655. Les tables d'addition et de multiplication sont représentées pour $n = 8$.

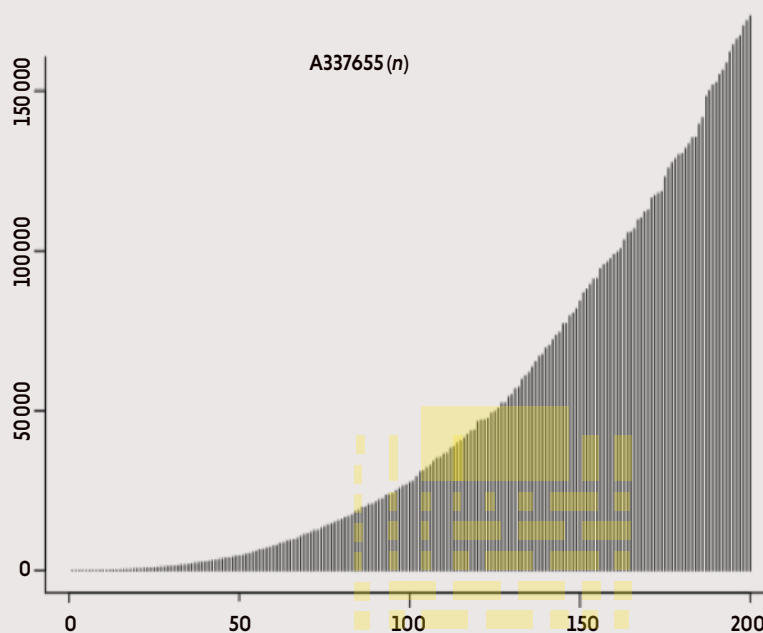


Table d'addition										Table de multiplication									
+	1	2	5	7	15	22	31	50		×	1	2	5	7	15	22	31	50	
1	1	3	6	8	16	23	32	51		1	1	2	5	7	15	22	31	50	
2	3	4	7	9	17	24	33	52		2	2	4	10	14	30	44	62	100	
5	6	7	10	12	20	27	36	55		5	5	10	25	35	75	110	155	250	
7	8	9	12	14	22	29	38	57		7	7	14	35	49	105	154	217	350	
15	16	17	20	22	30	37	46	65		15	15	30	75	105	225	330	465	750	
22	23	24	27	29	37	44	53	72		22	22	44	110	154	330	484	682	1100	
31	32	33	36	38	46	53	62	81		31	31	62	155	217	465	682	961	1550	
50	51	52	55	57	65	72	81	100		50	50	100	250	350	750	1100	1550	2500	

+1/31+... Cette somme d'inverses est une façon de mesurer la petitesse des termes de la suite, car plus une suite est petite à l'infini, plus la somme de ses inverses est grande.

Pour construire la suite de Mian-Chowla, on a utilisé à chaque fois le plus petit nombre permettant de compléter ce que l'on connaît déjà (algorithme glouton). On s'attendait donc à ce que la somme des inverses des termes de la suite soit la plus grande possible pour une suite (a_i) vérifiant $0 < a_i < a_j$ pour $i < j$ et ayant toutes les sommes $a_i + a_j$ avec $i \geq j$ différentes.

Or ce n'est pas vrai ! Ce résultat provient du chercheur chinois Zhenxiang Zhang. Il a considéré la suite (a'_i) ayant les mêmes termes que a_i jusqu'au quatorzième, qui est 182, puis au lieu de prendre 204, il a pris 229, qui convient pour que toutes les cases rouges de la table d'addition de $\{1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 229\}$ soient différentes. Il a alors poursuivi sa suite en utilisant le principe de l'algorithme glouton. Cette nouvelle suite porte le nom bien sûr de « suite de Zhang » et elle est présente dans l'encyclopédie de Neil Sloane sous le numéro A259964 : 1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 229, 257, 290, 312, 381, 419, 467, 507, 621, 721, 770, 864, 927, 1050, 1178, 1289, ...

Zhenxiang Zhang a montré que la somme des inverses des termes de la suite de Mian-Chowla est inférieure à 2,1596, alors que la somme des inverses des termes de sa suite est supérieure à 2,1597. Au sens de la somme des inverses, la suite de Zhang est donc meilleure que la suite de Mian-Chowla.

La raison de ce qui apparaît comme un paradoxe est que, même si l'on utilise l'algorithme glouton pour compléter la suite de Zhang après 229, les nombres qui viennent sont un peu plus petits que ceux de la suite de Mian-Chowla et que le léger désavantage que Zhenxiang Chang a accepté en prenant 229 au lieu de 204 est compensé par ce qui vient au-delà. En un mot : Zhenxiang Zhang accepte de se laisser dépasser en prenant 229, mais il compense plus loin ce handicap et termine gagnant !

On ignore aujourd'hui quelle est, dans l'absolu, la suite optimale pour les tables d'addition qui donne une somme des inverses la plus grande possible, ni même si cela existe puisqu'il se peut que toute valeur atteinte par une suite optimale soit battue par une autre. Gregory Yovanof et Herbert Taylor ont cependant démontré en 2000 qu'on pouvait faire mieux que la suite de Zhang et dépasser 2,1600383 pour la somme des inverses. À propos des tables d'addition, on se trouve donc face à une question non résolue et probablement difficile.

Les suites de Mian-Chowla et de Zhang donnent des tables d'addition optimales : leurs cases rouges sont toutes différentes jusqu'à l'infini. Il existe cependant bien d'autres

3



L'ALGORITHME GLOUTON

Pour calculer les suites de l'encadré 2 et de nombreuses suites mentionnées dans le présent article, on utilise des algorithmes « gloutons ». L'idée est de décomposer la recherche d'un objet en une série d'étapes et de se contenter de la meilleure solution possible à chaque étape, en espérant que, quand on regroupera le résultat des étapes successives, on aura la meilleure solution possible globalement. À défaut de produire la meilleure solution recherchée, l'algorithme donne souvent une assez bonne solution. L'intérêt est que ces algorithmes gloutons sont rapides comparés aux méthodes qui rechercheraient dans tout l'espace des solutions possibles. Parfois on démontre que l'algorithme glouton donne globalement la meilleure solution.

Considérons par exemple le problème consistant à atteindre une somme donnée N avec le moins de pièces possibles quand on dispose de pièces de monnaies de 1, 2, 5, 10, 20, 50 et 100 unités. Pour atteindre la somme N , l'algorithme glouton propose d'utiliser étape par étape la plus grande pièce possible inférieure ou égale à la somme qui reste à atteindre. Pour

$N = 66$, il donnera donc la consigne de prendre 50, puis 10, puis 5, puis 1. Quand les pièces disponibles sont 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, on démontre que cette solution, obtenue rapidement, sera toujours la meilleure en nombre de pièces. L'algorithme glouton est dans ce cas parfaitement satisfaisant, heureusement ce sont les dénominations utilisées dans notre monnaie.

En revanche, si les pièces disponibles sont 1, 3, 4, 10, 30, 40 et 100, pour atteindre 66 l'algorithme glouton indiquera « prendre 40, puis 10, puis 10, puis 4, puis 1, puis 1 » alors que « prendre 30, puis 30, puis 3, puis 3 » est meilleur.

Dans cet exemple, l'algorithme glouton est imparfait. Un autre exemple est donné dans le texte avec la suite de Zhang pour trouver une suite dont les tables d'addition contiennent toujours $n(n+1)/2$ éléments différents, et dont on veut aussi que la somme des inverses soit la plus grande possible. Dans ce cas, le problème de maximiser la suite des inverses est associé à un espace de recherche infini et on ne sait pas aujourd'hui le résoudre globalement.

séquences de cette catégorie, dont toutes celles partant d'une séquence convenable finie et procédant ensuite par l'algorithme glouton pour continuer. Les suites obtenues par ce moyen semblent malheureusement toutes plus ou moins aléatoires : pour en connaître les termes, il faut procéder pas à pas et on ne sait pas à l'avance ce qu'on trouvera.

LES PUISSANCES DE 2

Cependant, la suite très simple des puissances de deux, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n ,... est aussi optimale pour l'addition et ses termes sont faciles à anticiper et à écrire... du moins en base 2. En effet, deux cases rouges de la table d'addition pour $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n\}$ ne peuvent pas être égales. Voici le >